N° d'Ordre: 3 (1970)

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Alexandre KERBRAT

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE

1ère Thèse : CONTRIBUTION A L'ETUDE DE SYSTEMES EN CHAINE ENTRAINES EN ROTATION A L'INTERIEUR D'UN TUBE FIXE

2ème Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 29 Juin 1970 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. TARDY
M. GUEVEL
M. VILAINE
} Examinateurs

N° d'Ordre: 3 (1970)

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Alexandre KERBRAT

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE

1ère Thèse : CONTRIBUTION A L'ETUDE DE SYSTEMES EN CHAINE ENTRAINES EN ROTATION A L'INTERIEUR D'UN TUBE FIXE

2ème Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 29 Juin 1970 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. TARDY
M. GUEVEL
M. VILAINE
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE NANTES

Président	M. KERNEIS	Médecine
Vice-Président	M. PETRESCO	Mathématiques

●●●●●●●●●●

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. MOLINARO	«
	M. PAUC	«
	M. PETRESCO	«
	M. RAFFIN	«
	M. VIVIER (E.N.S.M.)	«
	M. TARDY (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. RAVILLY (E.N.S.M.)	«
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLOUD	«
	M. COLLET	«
	M. MINN	«
	M. MEZENCEV (E.N.S.M.)	«
	M. MOUTON	«
	M. DUNOYER	Chimie
	M. GRAFF	«
	M. PIERI	«
	M. QUINIOU	«
	M. WOJTKOWIAK	«
	Melle DEBRAUX	Biologie
	M. GARRIGUES	«
	Mme LE DOUARIN	«
	M. LE DOUARIN	«
	M. SELLIER	«
	M. CAVET	Sciences de la Terre

Professeurs sans chaire	M. MEYER	Mathématiques
	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	«
	M. LASKAR	«
	Melle OFFRET (E.N.S.M.)	«
	M. GOBIN (E.N.S.M.)	Chimie
	M. MARTIN	«
	M. ROUXEL	«
	M. TOURNOUX	«
	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	«
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. IBISCH	«
	M. LAMEAU (E.N.S.M.)	«
	M. LEBORGNE	«
	M. GUEVEL (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. SULMONT(E.N.S.M.)	«
	M. VILAINE (E.N.S.M.)	«
	M. CAILLER (I.U.T)	Physique
	M. COTTU (I.U.T.)	«
	M. LE BIHAN	«
	M. LE CORRE (I.U.T.)	«
	M. LONCKE	«
	M. ROSIER	«
	M. BOUCHY (I.U.T.)	Chimie
	M. CHABANNEL	«
	Mme MARTIN	«
	M. POINTEAU (E.N.S.M.)	«
	M. AMOURIQ	Biologie
	M. LEBRUN	«
	Mme NICOLAS-PRATT	«
	M. FORESTIER	Sciences de la Terre
	M. NICOLAS	«

Secrétaire Général : M. LERAY

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

Nous tenons tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, d'avoir bien voulu nous confier ce travail qui lui tenait beaucoup à coeur. Il nous a constamment guidé et conseillé tout au long de ce travail. Nous lui exprimons ici notre profonde et respectueuse gratitude d'avoir bien voulu assumer la présidence de cette thèse.

Nous présentons nos vifs remerciements à Messieurs les Professeurs TARDY, GUEVEL, VILAINE, qui nous ont fait l'honneur de constituer les membres du jury ; ainsi qu'à Monsieur le Professeur MEZENCEV, Directeur du laboratoire d'Automatisme de l'E. N. S. M.

Toute notre reconnaissance s'adresse au personnel du laboratoire de Mécanique des Structures, du laboratoire d'Automatisme et du Centre de Calcul Scientifique, qui nous a apporté une aide précieuse dans la réalisation de ce travail.

Enfin, nous ne saurions oublier d'adresser nos remerciements à Melle REUMONT et Madame MEZENCEV, ainsi qu'au service de l'imprimerie de l'E.N.S.M., qui ont su réaliser avec goût et compétence la présente thèse.

NOTATIONS

ℓ : longueur d'un pendule

m : masse d'un pendule

d : excentrement par rapport à oz

r_1 : rayon du cylindre

r_2 : rayon de la masse

$r = r_1 - r_2$

t : temps

$\tau = \omega_o t$: temps réduit

$\omega_o^2 = \frac{g}{\ell}$ pulsation propre au carré d'un pendule

ω = vitesse de rotation d'entrainement autour de oz

$R = \frac{\omega}{\omega_o}$

x,y,z : coordonnées cartésiennes

$j = \sqrt{-1}$

$u = x + jy$

$\rho = |u|$

AVANT-PROPOS

Cette étude entre dans le cadre d'une recherche que Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, a commencée avec Monsieur le Professeur PLUNKETT, dans son laboratoire à l'Université du Minnesota à Mineapolis, concernant l'étude du mouvement d'une tige déformable en rotation à l'intérieur d'un tube fixe. Ceci dans le but de déterminer les instabilités qui existent particulièrement dans les tiges de forage et qui entrainent la rupture de ces tiges.

La mise en équation et l'étude de la stabilité d'une tige déformable lorsque cette tige est libre (sans tube) a été faite par Messieurs PIRONNEAU, DUBIGEON |2| et par Monsieur CHIEN HEN WU |3|.

Lorsque la tige est en rotation à l'intérieur d'un tube fixe et que la tige vient en contact avec ce tube, l'étude du mouvement est très complexe.

Pour cette étude, Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, a proposé une schématisation du système. La tige continue est décomposée en éléments (pendules simples) articulés les uns aux autres, entrainés en rotation à l'intérieur d'un tube fixe.

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier le mouvement d'un ou deux pendules entrainés en rotation à l'intérieur d'un tube fixe.

Au laboratoire de Mécanique des Structures de l'E.N.S.M., dirigé par Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, nous avons réalisé un dispositif expérimental qui nous a permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes.

Nous avons retrouvé les positions d'équilibre relatif, c'est-à-dire où les masses tournent à la même vitesse que celle d'entraînement, prévues par la théorie de Monsieur le Recteur PIRONNEAU.

De plus, nous avons obtenu des mouvements qui constituent des instabilités par rapport à l'équilibre relatif.

Dans le cas d'un double pendule, il se produit dans certaines gammes de vitesse un phénomène de "fouettement" qui semble analogue au "fouettement" des arbres.

Les masses n'étant pas ponctuelles, nous avons remarqué que le système étudié se comportait à certaines vitesses de rotation comme un gyroscope de Sire : les masses roulent sur le cylindre.

Dans le cas d'un pendule, nous avons mis en évidence un phénomène de chocs périodiques.

Nous nous proposons ici d'étudier ces divers phénomènes.

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier le mouvement d'un ou deux pendules entrainés en rotation à l'intérieur d'un tube fixe.

Au laboratoire de Mécanique des Structures de l'E.N.S.M., dirigé par Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, nous avons réalisé un dispositif expérimental qui nous a permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes.

Nous avons retrouvé les positions d'équilibre relatif, c'est-à-dire où les masses tournent à la même vitesse que celle d'entraînement, prévues par la théorie de Monsieur le Recteur PIRONNEAU.

De plus, nous avons obtenu des mouvements qui constituent des instabilités par rapport à l'équilibre relatif.

Dans le cas d'un double pendule, il se produit dans certaines gammes de vitesse un phénomène de "fouettement" qui semble analogue au "fouettement" des arbres.

Les masses n'étant pas ponctuelles, nous avons remarqué que le système étudié se comportait à certaines vitesses de rotation comme un gyroscope de Sire : les masses roulent sur le cylindre.

Dans le cas d'un pendule, nous avons mis en évidence un phénomène de chocs périodiques.

Nous nous proposons ici d'étudier ces divers phénomènes.

SOMMAIRE

Pages

INTRODUCTION -

1ère Partie - MISE EN EQUATIONS -

1 - Hypothèses

2 - Pendule simple

3 - Double pendule

4 - Représentation plane équivalente

2ème Partie - ETUDE DE L'EQUILIBRE RELATIF -

1 - Pendule simple - Etude du glissement

1-1 Amplitude non limitée
1-2 Amplitude limitée $\rho = r$
1-3 Résultats

2 - Double pendule - Etude du fouettement

2-1 Amplitudes non limitées
2-2 Amplitude limitée $\rho_1 = r$, $\rho_2 < r$
2-3 Résultats

3ème Partie - EFFET GYROSCOPIQUE - ETUDE DU ROULEMENT -

1 - Condition de roulement sans glissement

2 - Pendule simple

3 - Double pendule - Seule la masse (2) roule

4 - Double pendule - Les deux masses roulent

4ème Partie - ETUDE DES CHOCS -

1 - Hypothèses

2 - Equations

3 - Discussion

4 - Choc parfait

5 - Choc imparfait

6 - Comparaison des chocs parfaits et imparfaits

CONCLUSION -

Annexe 1 - RESOLUTION DE LA STABILITE - FOUETTEMENT -

Annexe 2 - CHOCS -

2-1 Coefficient de restitution de vitesse R_T

Pages

2-2 Résolution du système d'équations

2-3 Choc parfait

2-4 Choc imparfait

2-5 Valeurs particulières

Annexe 3 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL -

SOMMAIRE

Pages

INTRODUCTION -

1ère Partie - MISE EN EQUATIONS -

1 - Hypothèses

2 - Pendule simple

3 - Double pendule

4 - Représentation plane équivalente

2ème Partie - ETUDE DE L'EQUILIBRE RELATIF -

1 - Pendule simple - Etude du glissement

1-1 Amplitude non limitée
1-2 Amplitude limitée $\rho = r$
1-3 Résultats

2 - Double pendule - Etude du fouettement

2-1 Amplitudes non limitées
2-2 Amplitude limitée $\rho_1 = r$, $\rho_2 < r$
2-3 Résultats

3ème Partie - EFFET GYROSCOPIQUE - ETUDE DU ROULEMENT -

1 - Condition de roulement sans glissement

2 - Pendule simple

3 - Double pendule - Seule la masse (2) roule

4 - Double pendule - Les deux masses roulent

4ème Partie - ETUDE DES CHOCS -

1 - Hypothèses

2 - Equations

3 - Discussion

4 - Choc parfait

5 - Choc imparfait

6 - Comparaison des chocs parfaits et imparfaits

CONCLUSION -

Annexe 1 - RESOLUTION DE LA STABILITE - FOUETTEMENT -

Annexe 2 - CHOCS -

2-1 Coefficient de restitution de vitesse R_T

Pages

2-2 Résolution du système d'équations

2-3 Choc parfait

2-4 Choc imparfait

2-5 Valeurs particulières

Annexe 3 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL -

1 - HYPOTHESES -

$d \ll \ell$

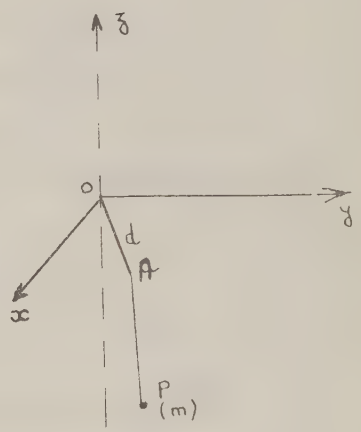
Nous faisons l'hypothèse des petits mouvements ($x,y \ll \ell$) et nous linéarisons.

Les masses sont supposées ponctuelles.

Les forces d'amortissement s'exercent uniquement sur les masses et sont opposées aux vitesses de ces masses.

$$F(\vec{P}_i) = -2\,\varepsilon\, m\, \omega_o\, V(\vec{P}_i)$$

2 - PENDULE SIMPLE -



Nous avons :

$\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

$AP^2 = \ell^2 = (x-d\cos\omega t)^2 + (y-d\sin\omega t)^2 + z^2$

d'après les hypothèses faites nous pouvons écrire :

$$z \simeq -\ell\left[1 - \frac{(x-d\cos\omega t)^2 + (y-d\sin\omega t)^2}{2\,\ell^2}\right]$$

Nous voyons donc que la variation Δz de z est un infiniment petit du second ordre par rapport à x et y. Il en est de même de $z' = \frac{dz}{dt}$.

2-1 Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, V(P)^2 \simeq \frac{1}{2}\, m\, (x'^2 + y'^2)$$

2-2 Energie potentielle

$$E_p = mg\, z(p) + c^{ste}$$

$$E_p \simeq mg\left[\frac{(x-d\cos\omega t)^2 + (y-d\sin\omega t)^2}{2\,\ell}\right] + c^{ste}$$

2-3 Travail des forces

La force d'amortissement est $F(\vec{P}) = -2\,\varepsilon\, m\, \omega_o\, V(\vec{P})$

$$\delta W = F(\vec{P})\ \delta\vec{P}$$

$$\delta W = -2\,\varepsilon\, m\, \omega_o (x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)$$

soit :

$$\delta W \simeq -2\,\varepsilon\, m\, \omega_o (x'\delta x + y'\delta y)$$

2-4 Equations de Lagrange

$$x'' + 2\,\varepsilon\,\omega_o\, x' + \omega_o^2\, x = \omega_o^2\, d \cos \omega t$$

$$y'' + 2\,\varepsilon\,\omega_o\, y' + \omega_o^2\, y = \omega_o^2\, d \sin \omega t$$

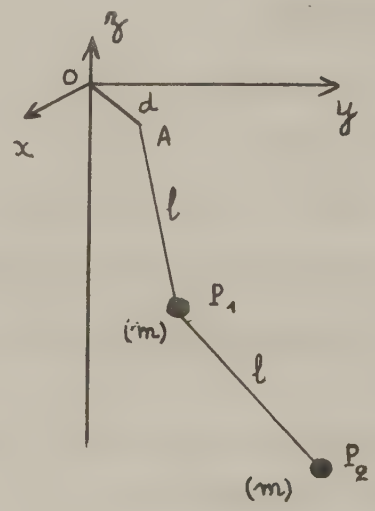
Avec le changement de variable $\tau = \omega_o t$ $\quad \frac{dx}{d\tau} = \dot{x}$, le système d'équations devient :

$$\ddot{x} + 2\,\varepsilon\,\dot{x} + x = d \cos R\,\tau$$

$$\ddot{y} + 2\,\varepsilon\,\dot{y} + y = d \sin R\,\tau$$

En posant $u = x + jy$, nous obtenons :

$$\boxed{\ddot{u} + 2\,\varepsilon\,\dot{u} + u = d\, e^{jR\tau}} \qquad (1)$$



3 - DOUBLE PENDULE -

$$\vec{OP_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z}$$

$$\vec{OP_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z}$$

D'après les hypothèses faites :

$$z_1 \simeq -\ell \left[1 - \frac{(x_1 - d\cos\omega t)^2 + (y_1 - d\sin\omega t)^2}{2\,\ell^2} \right]$$

$$z_2 \simeq -2\ell + \frac{(x_1 - d\cos\omega t)^2 + (y_1 - d\sin\omega t)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2\,\ell}$$

Nous voyons que les variations Δz_1 et Δz_2 de z_1 et z_2 sont des infiniments petits de second ordre par rapport à x_1, x_2, y_1, y_2.

3-1 Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}\, m \left[V(P_1)^2 + V(P_2)^2 \right] \simeq \frac{1}{2}\, m\, (x_1'^2 + y_1'^2 + x_2'^2 + y_2'^2)$$

3-2 Energie potentielle

$$E_p = mg\,(z_1+z_2) + c^{ste}$$

$$E_p \simeq \frac{mg}{2\ell}\left[2(x_1-d\cos\omega t)^2 + (y_1-d\sin\omega t)^2 + (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2\right] + c^{ste}$$

3-3 Travail des forces

$$F(\vec{P}_1) = -\,2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,V(\vec{P}_1),\quad F(\vec{P}_2) = -\,2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,V(\vec{P}_2)$$

$$\delta W = F(\vec{P}_1).\,\delta\vec{P}_1 + F(\vec{P}_2).\,\delta\vec{P}_2$$

$$\delta W \simeq -\,2\,\varepsilon\,m\,\omega_o(x_1'\,\delta x_1 + y_1'\,\delta y_1 + x_2'\,\delta x_2 + y_2'\,\delta y_2)$$

3-4 Equations de Lagrange

$$x_1'' + 2\,\varepsilon\,\omega_o\,x_1' + 3\,\omega_o^2\,x_1 - \omega_o^2\,x_2 = 2\,\omega_o^2\,d\cos\omega t$$

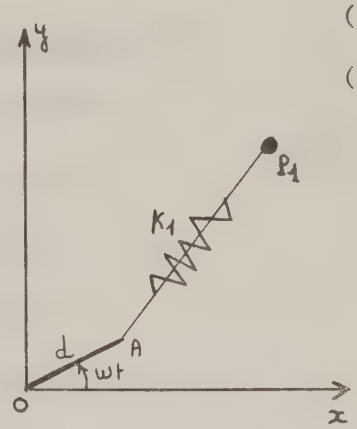
$$y_1'' = 2\,\varepsilon\,\omega_o\,y_1' + 3\,\omega_o^2\,y_1 - \omega_o^2\,y_2 = 2\,\omega_o^2\,d\sin\omega t$$

$$x_2'' + 2\,\varepsilon\,\omega_o\,x_2' - \omega_o^2\,x_1 + \omega_o^2\,x_2 = 0$$

$$y_2'' + 2\,\varepsilon\,\omega_o\,y_2' - \omega_o^2\,y_1 + \omega_o^2\,y_2 = 0$$

Avec le changement de variable $\tau = \omega_o t$ et, en posant $u_1 = x_1 + jy_1$ et $u_2 = x_2 + jy_2$, nous pouvons grouper les équations deux par deux.

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{u}_1 + 2\,\varepsilon\,\dot{u}_1 + 3\,u_1 - u_2 = 2\,d\,e^{jR\tau} \\ &\ddot{u}_2 + 2\,\varepsilon\,\dot{u}_2 - u_1 + u_2 = 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}(2)\\(3)\end{aligned}$$



4 - REPRESENTATION PLANE EQUIVALENTE -

4-1 Système équivalent à un pendule

4-1-1 Description

Considérons le système plan ci-contre Un ressort de raideur k_1 dans la direction AP_1 et de raideur infinie dans les autres directions, est articulé en A à l'extrémité d'une tige OA de longueur d qui est entrainée en rotation autour du point fixe O. A l'extrémité libre du ressort P_1 est fixée une masse (m).

4-1-2 Equations du mouvement

Ecrivons les théorèmes généraux pour le mouvement de la masse :

$$m\,x'' = -\,k_1(x-d\cos\omega t) - 2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,x'$$

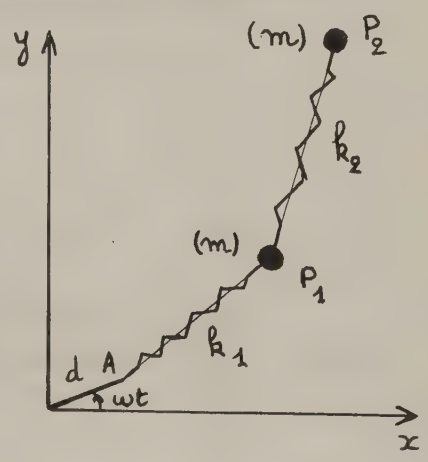
$$m\,y'' = -\,k_1(y-d\sin\omega t) - 2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,y'$$

Posons $\frac{k_1}{m} = \omega_o^2$, $\omega_o t = \tau$, $x + jy = u$, nous obtenons l'équation :

$$\ddot{u} + 2\,\varepsilon\,\dot{u} + u = d\,e^{jR\tau} \qquad (1)$$

L'équation est identique à l'équation du mouvement du pendule simple.

4-2 Système équivalent à un double pendule



4-2-1 Description

Au système précédent ajoutons un ressort de raideur k_2 dans la direction $P_1\,P_2$, de raideur infinie dans les autres directions. Ce ressort est articulé en P_1 et à son extrémité libre P_2 est fixée une masse (m).

4-2-2 Equations du mouvement

Appliquons les théorèmes généraux pour les masses situées en P_1 et P_2 :

$$m\,x_1'' = -\,k_1(x_1-d\cos\omega t) + k_2(x_2-x_1) - 2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,x_1'$$

$$m\,y_1'' = -\,k_1(y_1-d\sin\omega t) + k_2(y_2-y_1) - 2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,y_1'$$

$$m\,x_2'' = -\,k_2(x_2-x_1) - 2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,x_2'$$

$$m\,y_2'' = -\,k_2(y_2-y_1) - 2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,y_2'$$

En posant $\frac{k_2}{m} = \omega_o^2$, $k_1 = 2\,k_2$, $\tau = \omega_o t$

$$x_1 + jy_1 = u_1, \quad x_2 + jy_2 = u_2$$

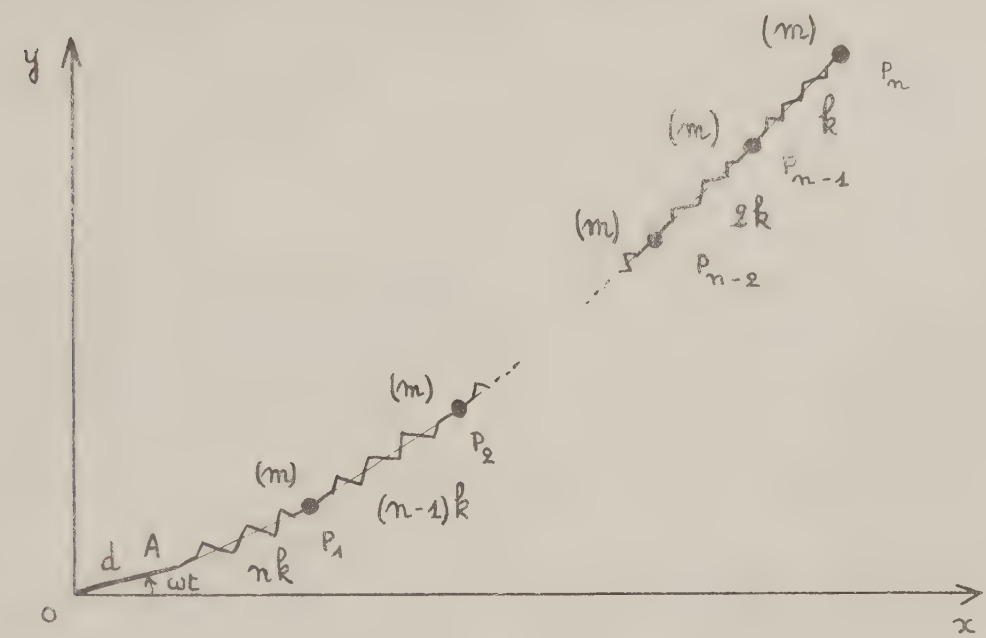
Nous obtenons les équations :

$$\ddot{u}_1 + 2\,\varepsilon\,\dot{u}_1 + 3\,u_1 - u_2 = 2\,d\,e^{jR\tau} \qquad (2)$$

$$\ddot{u}_2 + 2\,\varepsilon\,\dot{u}_2 - u_1 + u_2 = 0 \qquad (3)$$

qui sont les mêmes que les équations du double pendule.

4-3 Système équivalent à n pendules identiques en chaîne



Les ressorts sont articulés au point A et aux points P_i où se trouvent des masses identiques (m). Les ressorts ont les raideurs indiquées sur le graphique suivant les directions $P_i\ P_{i+1}$ et une raideur infinie suivant les autres directions.

$\frac{k}{m} = \omega_o^2$ est la pulsation propre au carré d'un pendule simple.

2ème Partie - ETUDE DE L'EQUILIBRE RELATIF -

1 - PENDULE SIMPLE - ETUDE DU GLISSEMENT -

1-1 Amplitude non limitée

1-1-1 Equilibre relatif

L'équation du mouvement est :

$$\ddot{u} + 2\,\varepsilon\,\dot{u} + u = d\,e^{jR\tau}$$

Les trajectoires sont des cercles centrés sur l'axe oz,

d'où :

$$u_e = \rho\,e^{j(R\tau-\phi)}$$

Nous obtenons donc :

$$\boxed{\rho = \frac{d}{\sqrt{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\,R^2}}}$$

$$\boxed{tg\,\phi = \frac{2\,\varepsilon\,R}{1 - R^2}}$$

1-1-2 Stabilité

Soit :
$$u = u_e + v$$
$$\dot{u} = \dot{u}_e + \dot{v}$$
$$\ddot{u} = \ddot{u}_e + \ddot{v}$$

Portons dans l'équation du mouvement, nous obtenons l'équation :

$$\ddot{v} + 2\,\varepsilon\,\dot{v} + v = 0$$

Si $\varepsilon < 1$, v décroit et tend vers zéro en fonction du temps. La solution $u = u_e$ est donc une position d'équilibre relatif stable.

1-2 Amplitude limitée $\rho = r$

1-2-1 Mise en équation

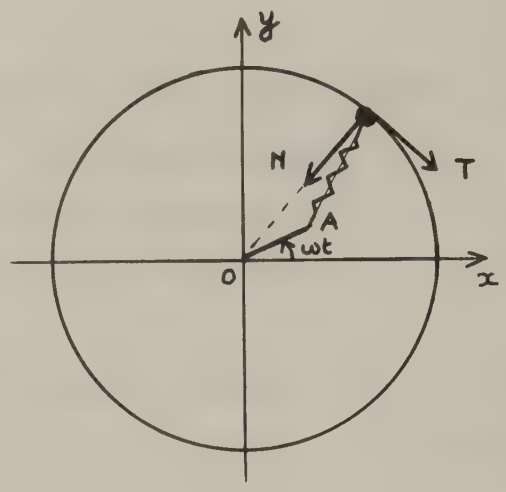
La masse vient en contact avec une paroi cylindrique. Le coeffi-

cient de frottement au point de contact est f ($f = tg\ \psi$).

Lorsqu'il y a contact, il existe une réaction normale $\vec{N}$ et une réaction tangentielle $\vec{T}$.

$$\vec{N} = -N\left(\frac{x}{r}\vec{x} + \frac{y}{r}\vec{y}\right)$$

$$\vec{T} = T\left(\frac{y}{r}\vec{x} - \frac{x}{r}\vec{y}\right)$$



Conformément à la figure, nous vérifions que la condition :

$$\vec{T}.\vec{U} < 0$$

est réalisée ($\vec{U}$: vitesse de glissement)

Nous avons donc $T = fN$.

Le travail virtuel de $\vec{N}$ et $\vec{T}$ est :

$$\delta W_1 = \left(-N\frac{x}{r} + fN\frac{y}{r}\right)\delta x + \left(-N\frac{y}{r} - fN\frac{x}{r}\right)\delta y$$

En posant $N = \mu\ m\ \omega_o^2\ r$, et en tenant compte des changements de variables $\tau = \omega_o t$ et $u = x + jy$, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\boxed{\ddot{u} + 2\ \varepsilon\ \dot{u} + \left[1 + \mu\ (1+jf)\right]\ u = d\ e^{jR\tau}} \qquad (1')$$

1-2-2 Equilibre relatif

L'amplitude étant limitée, les solutions de l'équilibre relatif seront de la forme :

$$u_e = r\ e^{j(R\tau-\phi)},$$

En portant dans l'équation du mouvement, nous obtenons :

$$\sin\ (\phi-\psi) = \frac{2\ \varepsilon\ R}{d/r}\cos\ \psi + \frac{\sin\ \psi}{d/r}\ (R^2-1) \qquad (4)$$

$$\mu = R^2-1 + \frac{d}{r}\cos\ \phi \qquad (5)$$

1-2-3 Discussion

Conditions pour qu'il y ait contact et qu'il se conserve.

a) Il faut que $\rho > r$

soit : $\dfrac{d}{\sqrt{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\,R^2}} = r$

$$R^2_{\substack{1\\2}} = 1-2\,\varepsilon^2 \mp \sqrt{(1-2\,\varepsilon^2) - 1 + \frac{d^2}{r^2}}$$

d'où : $\rho > r$ pour $R_1^2 < R^2 < R_2^2$

b) Il faut que la réaction normale soit positive.

soit $N > 0$ et comme $N = \mu\, m\, \omega_o^2\, r$, $\mu > 0$.

Etudions l'équation 4 : $\sin(\phi-\psi) = \dfrac{2\,\varepsilon\,R}{d/r}\cos\psi + \dfrac{\sin\psi}{d/r}(R^2-1)$

Cette équation reste valable si $-1 < \sin(\phi-\psi) < 1$

soit pour $R'_{c2} < R < R'_{c1}$ et $R_{c1} < R < R_{c2}$

avec :

$$R'_{c2} = \frac{-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + f\left(f + \dfrac{d}{r\cos\psi}\right)}}{f}$$

$$R'_{c1} = \frac{-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + f\left(f - \dfrac{d}{r\cos\psi}\right)}}{f}$$

$$R_{c1} = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + f\left(f - \dfrac{d}{r\cos\psi}\right)}}{f}$$

$$R_{c2} = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + f\left(f + \dfrac{d}{r\cos\psi}\right)}}{f}$$

L'intervalle $R'_{c2} < R < R'_{c1}$ correspond à deux valeurs négatives de R et n'est pas intéressant.

Dans l'intervalle $R_{c1} < R < R_{c2}$, à une valeur de R correspondent deux valeurs de ϕ : ϕ_{11} et ϕ_{12} avec :

$$-\frac{\pi}{2} + \psi < \phi_{11} < \frac{\pi}{2} + \psi \qquad\qquad \phi_{12} = \pi + 2\psi - \phi_{11}$$

Aux deux valeurs de ϕ correspondent, d'après l'équation (5), deux valeurs de μ : μ_{11} et μ_{12}.

L'étude de ϕ_{11}, ϕ_{12}, μ_{11}, μ_{12} a montré que :

$R_{c1} < R < R_1$	μ_{11} et $\mu_{12} < 0$
$R_1 < R < R_2$	$\mu_{11} > 0$, $\mu_{12} < 0$
$R_2 < R < R_{c2}$	μ_{11} et $\mu_{12} > 0$
$R > R_{c2}$	ϕ n'existe pas

Nous voyons donc que la réaction normale est positive dans l'intervalle $[R_1, R_{c2}]$.

Dans l'intervalle $[R_1, R_2]$ la phase ϕ a une seule valeur ϕ_{11}.

Dans l'intervalle $[R_2, R_{c2}]$ la phase ϕ a deux valeurs : ϕ_{11} et ϕ_{12}.

1-2-4 Stabilité

Considérons une perturbation sur la phase $u = r\, e^{j(R\tau-\phi-\alpha)}$, la perturbation α étant supposée petite.

En portant dans l'équation du mouvement et en séparant parties réelle et imaginaire, nous obtenons :

$$- (R-\dot{\alpha})^2 + 1 + \mu = \frac{d}{r} \cos(\phi+\alpha)$$

$$- \ddot{\alpha} + 2\varepsilon\, (R-\dot{\alpha}) + \mu f = \frac{d}{r} \sin(\phi+\alpha)$$

En éliminant μ entre ces deux équations, en tenant compte de l'équation (4) et en linéarisant, nous obtenons :

$$\dddot{\alpha} + 2(\varepsilon+fR)\, \ddot{\alpha} + \frac{d}{r \cos \psi} \cos(\phi-\psi)\alpha = 0$$

Le mouvement sera donc stable si $\cos(\phi-\psi) > 0$

soit $-\frac{\pi}{2} + \psi < \phi < \frac{\pi}{2} + \psi$

Il faut donc que $\phi = \phi_{11}$.

Nous en concluons donc que quand R croit, le contact existe et est stable pour $R_1 < R < R_{c2}$, le déphasage est $\phi = \phi_{11} < \frac{\pi}{2} + \psi$.

Quand R décroit à partir d'une grande valeur, le contact existe et est stable pour $R_1 < R < R_2$, et le déphasage est $\phi = \phi_{11} < \frac{\pi}{2} + \psi$.

1-3 Résultats

La figure (1) montre les variations de l'amplitude ρ et de la phase ϕ, lorsque la vitesse de rotation R croit ou décroit.

Nous avons étudié d'une manière plus précise la phase lorsque la masse glisse sur le cylindre.

La figure (2) montre l'influence du frottement pour un amortissement pratiquement nul.

La figure (3) montre l'influence de l'amortissement pour un coefficient de frottement donné (f = 0,1).

Sur ces mêmes figures, nous avons porté les valeurs obtenues expérimentalement. Compte tenu du fait que les paramètres (frottement et amortissement) peuvent avoir des valeurs différentes de celles prises pour les courbes théoriques, et que ces paramètres peuvent varier légèrement avec la vitesse de rotation, nous pouvons dire que les résultats théoriques et expérimentaux concordent.

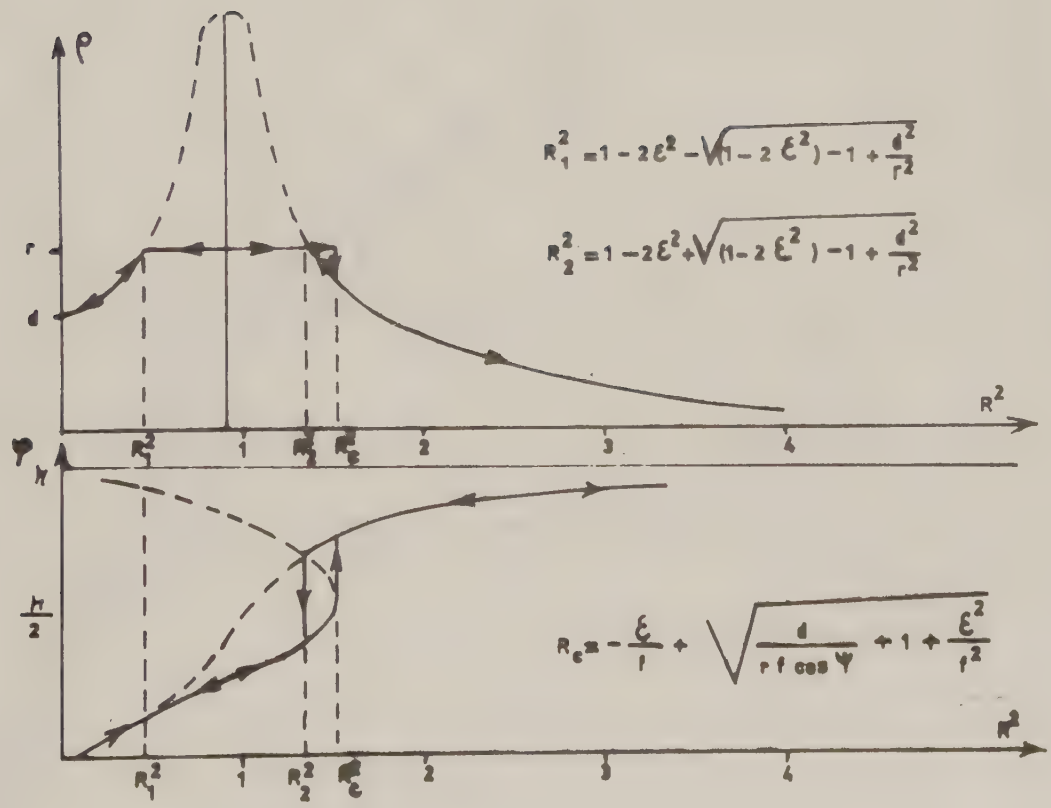
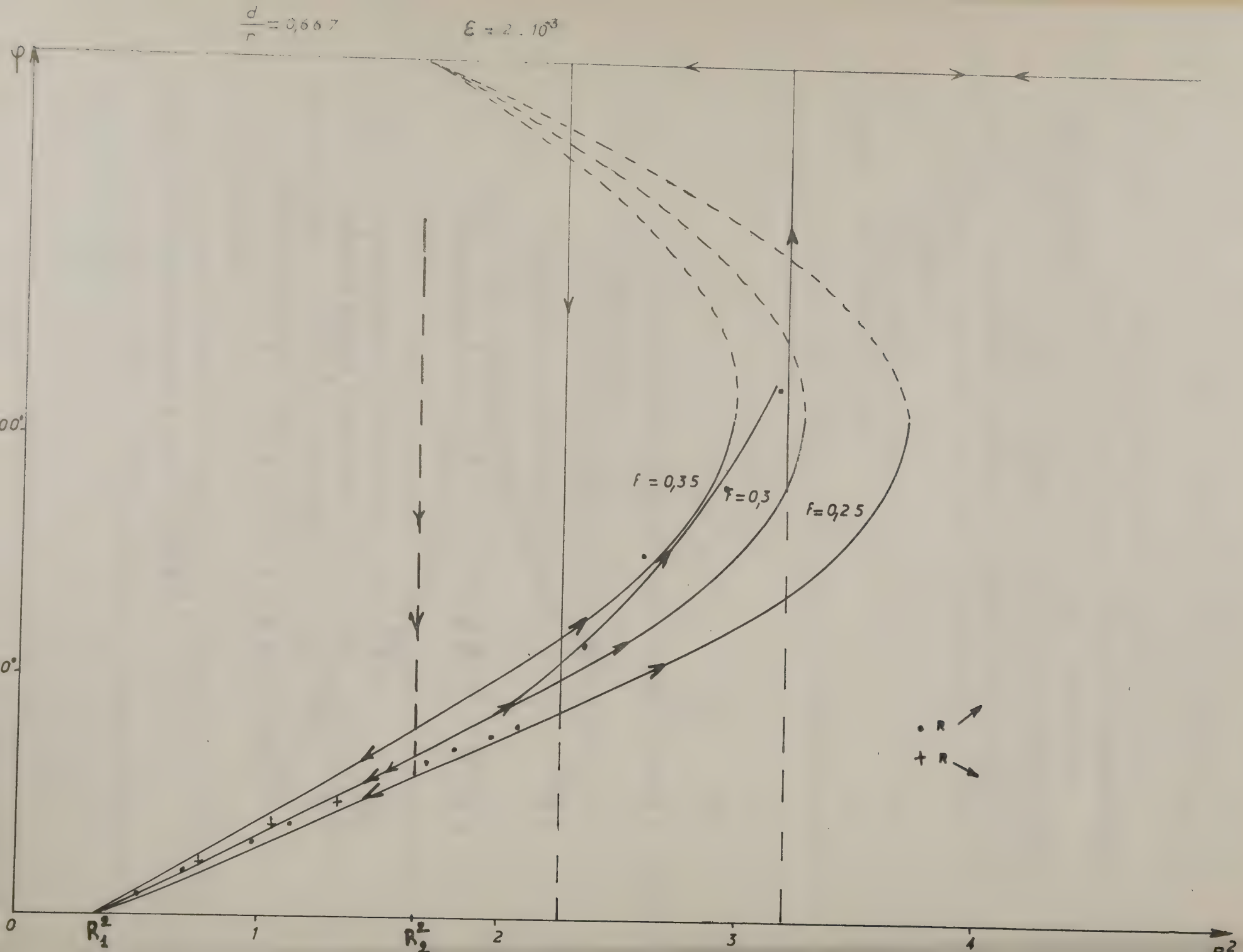
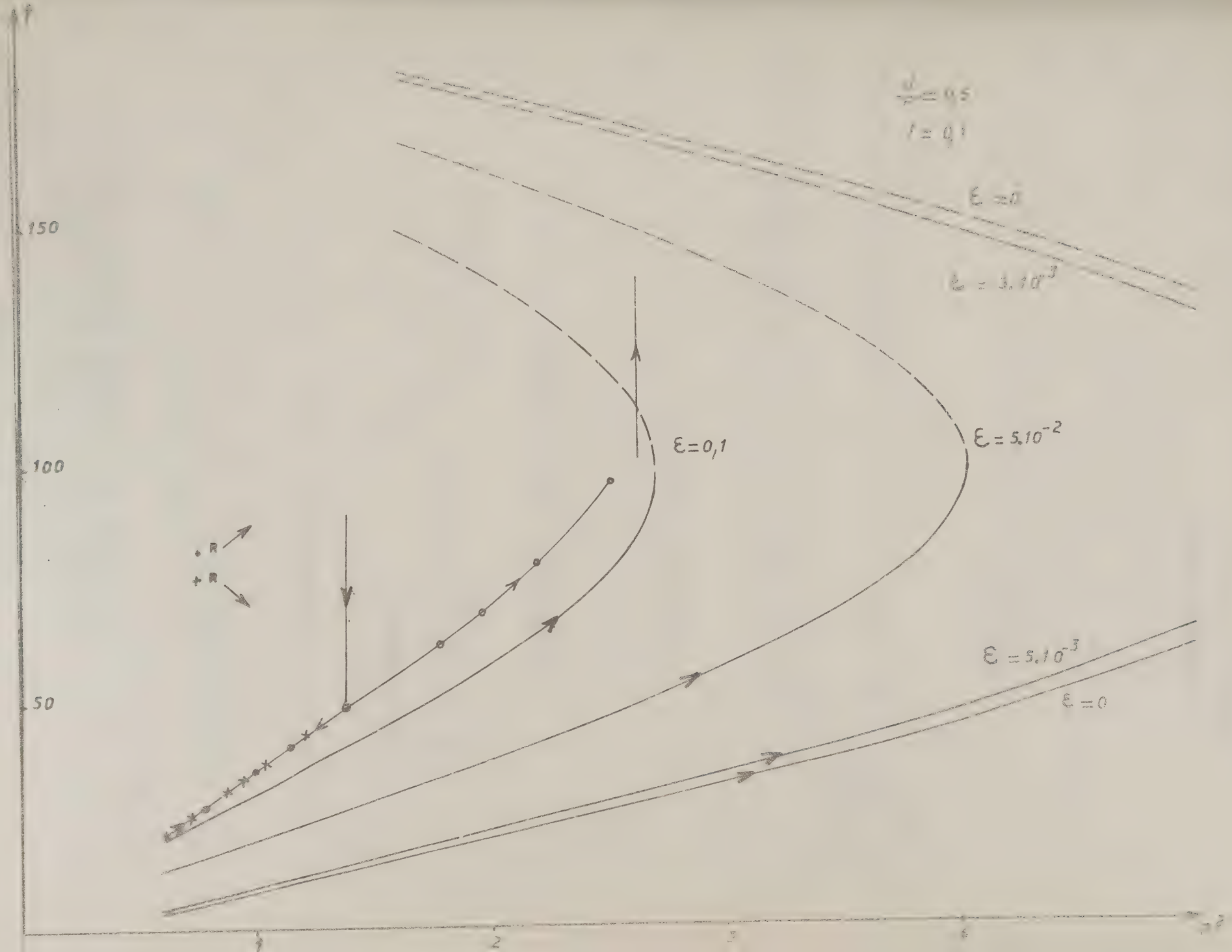


Fig (1)


d/r = 0,667
ε = 2 . 10⁻³
φ
00°
0°
f = 0,35
f = 0,3
f = 0,25
• R ↗
+ R ↘
0
R₁²
1
R₂²
2
3
4
R²


150
100
50
1
2
3
4
ε = 0,1
ε = 5.10^-2
ε = 5.10^-3
ε = 0
• R
+ R

2 - DOUBLE PENDULE - ETUDE DU FOUETTEMENT -

2-1 Amplitudes non limitées

2-1-1 Equilibre relatif

Les équations du mouvement sont :

$$\ddot{u}_1 + 2\,\varepsilon\,\dot{u}_1 + 3\,u_1 - u_2 = 2\,d\,e^{jR\tau}$$

$$\ddot{u}_2 + 2\,\varepsilon\,\dot{u}_2 - u_1 + u_2 = 0$$

Les trajectoires sont des cercles centrés sur l'axe oz.

d'où : $u_{1e} = \rho_1\, e^{j(R\tau-\phi_1)}$

$$u_{2e} = \rho_2\, e^{j(R\tau-\phi_2)}$$

En portant ces valeurs dans l'équation du mouvement, nous en tirons :

$$\rho_1^2 = \frac{4\,d^2}{\left[3-R^2 - \dfrac{1-R^2}{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2R^2}\right]^2 + \left[2\varepsilon R\,\dfrac{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2R^2 + 1}{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2R^2}\right]^2}$$

$$\operatorname{tg}\phi_1 = \frac{2\varepsilon R\left[(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2R^2 + 1\right]}{(3-R^2)\left[(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2R^2\right] - (1-R^2)}$$

$$\rho_2^2 = \frac{4\,d^2}{16\,\varepsilon^2R^2(2-R^2)^2 + (2-4R^2 + R^4 - 4\varepsilon^2R^2)^2}$$

$$\operatorname{tg}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{2\varepsilon R}{1-R^2}$$

2-1-2 Stabilité

Soit : $u_1 = u_{1e} + v_1$

$$u_2 = u_{2e} + v_2$$

En portant dans les équations du mouvement, nous obtenons :

$$\ddot{v}_1 + 2\,\varepsilon\,\dot{v}_1 + 3\,v_1 - v_2 = 0$$

$$\ddot{v}_2 + 2\,\varepsilon\,\dot{v}_2 - v_1 + v_2 = 0$$

ou, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\,\varepsilon & 0 \\ 0 & 2\,\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

Cherchons des solutions de la forme :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = A\, e^{s\tau}$$

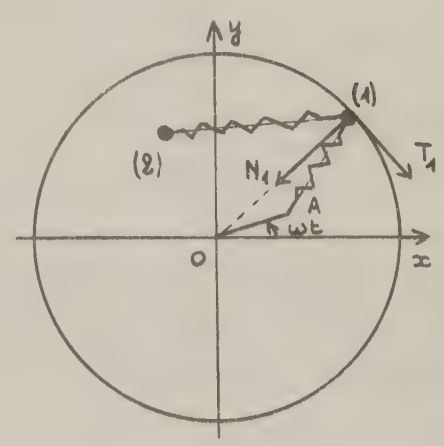
Nous obtenons l'équation caractéristique :

$$s^4 + 4\,\varepsilon\, s^3 + 4(1+\varepsilon^2)s^2 + 8\,\varepsilon\, s + 2 = 0$$

En appliquant le critère de Routh, nous trouvons que toutes les racines s_i de cette équation ont des parties réelles négatives.

Les solutions u_{1e} et u_{2e} sont donc des solutions stables.

2-2 Amplitudes limitées, cas $\rho_1 = r$, $\rho_2 < r$



2-2-1 Mise en équation

La masse (1) est en contact avec la paroi cylindrique. La réaction normale est $\vec{N}_1$, la réaction tangentielle $\vec{T}_1$.

Nous posons $N_1 = \mu_1\, m\, \omega_o^2\, r$

Les équations du mouvement sont modifiées comme dans le cas d'un pendule simple et deviennent :

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{u}_1 + 2\,\varepsilon\,\dot{u}_1 + \left[3+\mu_1(1+jf)\right]u_1 - u_2 = 2\,d\,e^{jR\tau} && (2') \\ &\ddot{u}_2 + 2\,\varepsilon\,\dot{u}_2 - u_1 + u_2 = 0 && (3') \end{aligned}}$$

2-2-2 Equilibre relatif

Les trajectoires sont des cercles centrés sur l'axe oz.

d'où : $u_{11} = r\, e^{j(R\tau-\phi_1)}$

$u_{21} = \rho_{21}\, e^{j(R\tau-\phi_2)}$

En portant dans les équations du mouvement, nous en tirons les valeurs de ϕ_1, μ_1, ρ_{21}, $\phi_2-\phi_1$

$$\sin(\phi_1-\psi) = \frac{r\cos\psi}{2\,d}\left\{f\left[R^2-3+\frac{1-R^2}{(1-R^2)^2+4\,\varepsilon^2R^2}\right] + 2\varepsilon R\,\frac{(1-R^2)^2+4\,\varepsilon^2R^2+1}{(1-R^2)^2+4\,\varepsilon^2R^2}\right\} \qquad (6)$$

$$\mu_1 = \frac{2\,d}{r}\cos\phi_1 + \frac{1-R^2}{(1-R^2)^2+4\,\varepsilon^2R^2} - 3 + R^2 \qquad (7)$$

$$\rho_{21} = \frac{r}{\sqrt{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2 R^2}}$$

$$tg(\phi_2-\phi_1) = \frac{2\varepsilon R}{1-R^2}$$

2-2-3 Discussion

Conditions pour qu'il y ait contact et qu'il persiste.

a) Il faut que $\rho_1 > r$

En général $\rho_1 = r$ pour quatre valeurs de R^2 :

$R_1^2 < R^2 < R_2^2$ $\quad \rho_1 > r \quad \rho_2 > r$

$R_3^2 < R^2 < R_4^2$ $\quad \rho_1 > r \quad \rho_2 < r$ cas qui nous intéresse.

b) Il faut que la réaction normale soit positive ($\mu_1 > 0$).

Une étude analogue à celle faite dans le cas d'un pendule simple [2ème Partie § 1-2-3] montre que lorsque R augmente, le contact avec la paroi peut persister jusqu'à une valeur $R_c > R_4$, et pour cette valeur R_c le déphasage est :

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} + \psi$$

Donc

R croissant	$\rho_1 = r,\ \rho_2 < r$	pour	$R_3 < R < R_c$
R décroissant	$\rho_1 = r,\ \rho_2 < r$	pour	$R_3 < R < R_4$

2-2-4 Stabilité de l'équilibre relatif - Fouettement

Pour étudier la stabilité de cet équilibre, nous allons considérer une perturbation sur la phase de la masse (1), et une perturbation sur l'amplitude et la phase de la masse (2), c'est-à-dire que nous supposons que la masse (1) reste en contact avec le cylindre.

Soient donc les solutions :

$$u_1 = r\, e^{j(R\tau-\phi_1+\alpha)}$$

$$u_2 = (\rho_{21}+\rho)e^{j(R\tau-\phi_2+\alpha+\beta)}$$

où α, β, ρ et leurs dérivées premières et secondes, par rapport à τ, sont supposés petits.

En portant dans les équations du mouvement, nous obtenons un système d'équations qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + KX = 0 \qquad \text{avec} \qquad X = \begin{bmatrix} \rho \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

et étudier la stabilité en utilisant le critère de Routh (cf Annexe 1).

2-3 Résultats

Figure 4 : Courbes des amplitudes et des phases pour $\varepsilon = 0$, $f \neq 0$

Figure 5 : Courbes des amplitudes pour $\varepsilon = 0{,}2$, $f = 0{,}2$

Figure 6 : Courbe de la phase ϕ_1 pour $\varepsilon = 0{,}2$, $f = 0{,}2$

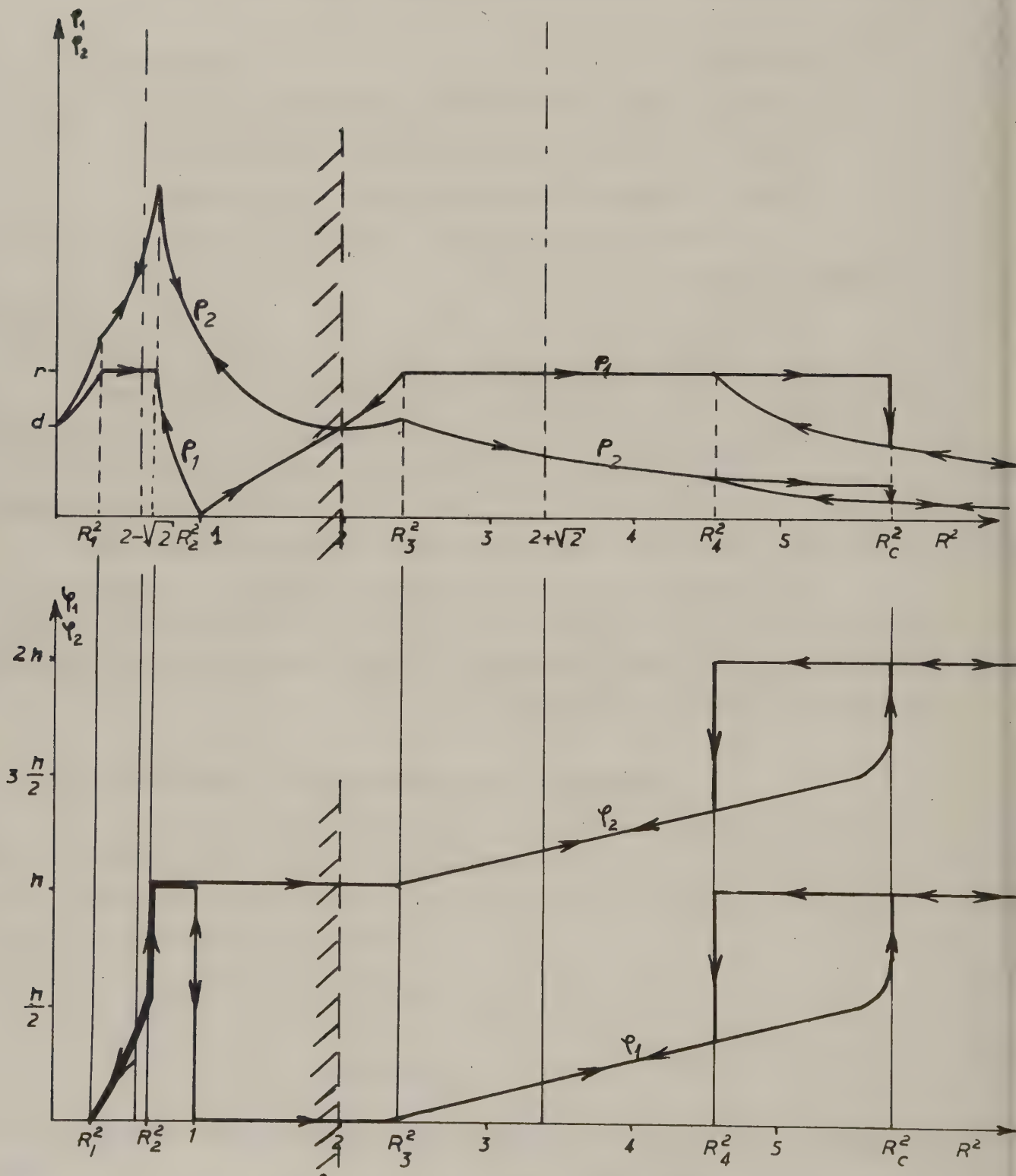
L'étude de la stabilité étant très complexe, la résolution ne peut se faire que numériquement à l'ordinateur.

Les résultats, suivant les valeurs de ε et f, sont groupés sur les figures 7 et 8, qui montrent, en fonction de R^2 et $\frac{d}{r}$, les zones où la masse (1) est en contact avec le cylindre et les zones où ce contact est instable.

Expérimentalement, lorsque la masse (1) vient en contact avec le cylindre, nous constatons que le mouvement n'est plus stable, les trajectoires des masses ne sont plus des cercles. Ce phénomène, nous l'avons appelé "fouettement". Ce fouettement est d'autant plus important que l'amortissement est faible.

Dans certaines zones, il est possible de stabiliser le mouvement (pour un amortissement important), nous obtenons ainsi des zones de stabilité et d'instabilité qui correspondent sensiblement aux zones trouvées par l'étude théorique, sauf pour des valeurs de $\frac{d}{r}$ voisines de 1.

Courbes théoriques $\varepsilon = 0$ $f \neq 0$



$$R_3^2 = 2 - \frac{d}{r} + \sqrt{2 - 2\frac{d}{r} + \frac{d^2}{r^2}}$$

$$R_4^2 = 2 + \frac{d}{r} + \sqrt{2 + 2\frac{d}{r} + \frac{d^2}{r^2}}$$

$$R_c^2 = 2 + \frac{d}{r}\sqrt{1 + \frac{1}{f^2}} + \sqrt{2 + 2\frac{d}{r}\sqrt{1 + \frac{1}{f^2}} + \frac{d^2}{r^2}\left(1 + \frac{1}{f^2}\right)}$$

Fig (6)

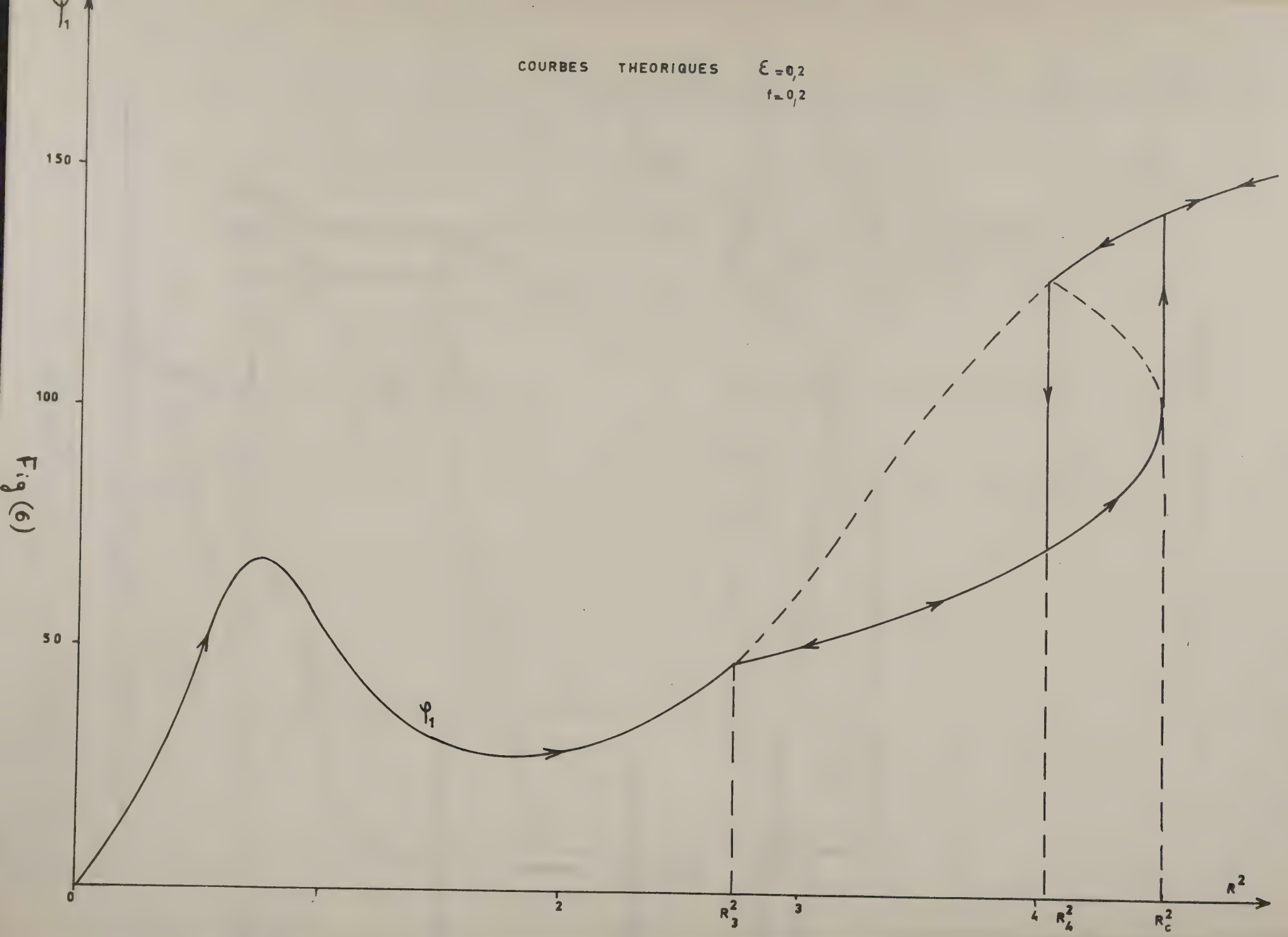
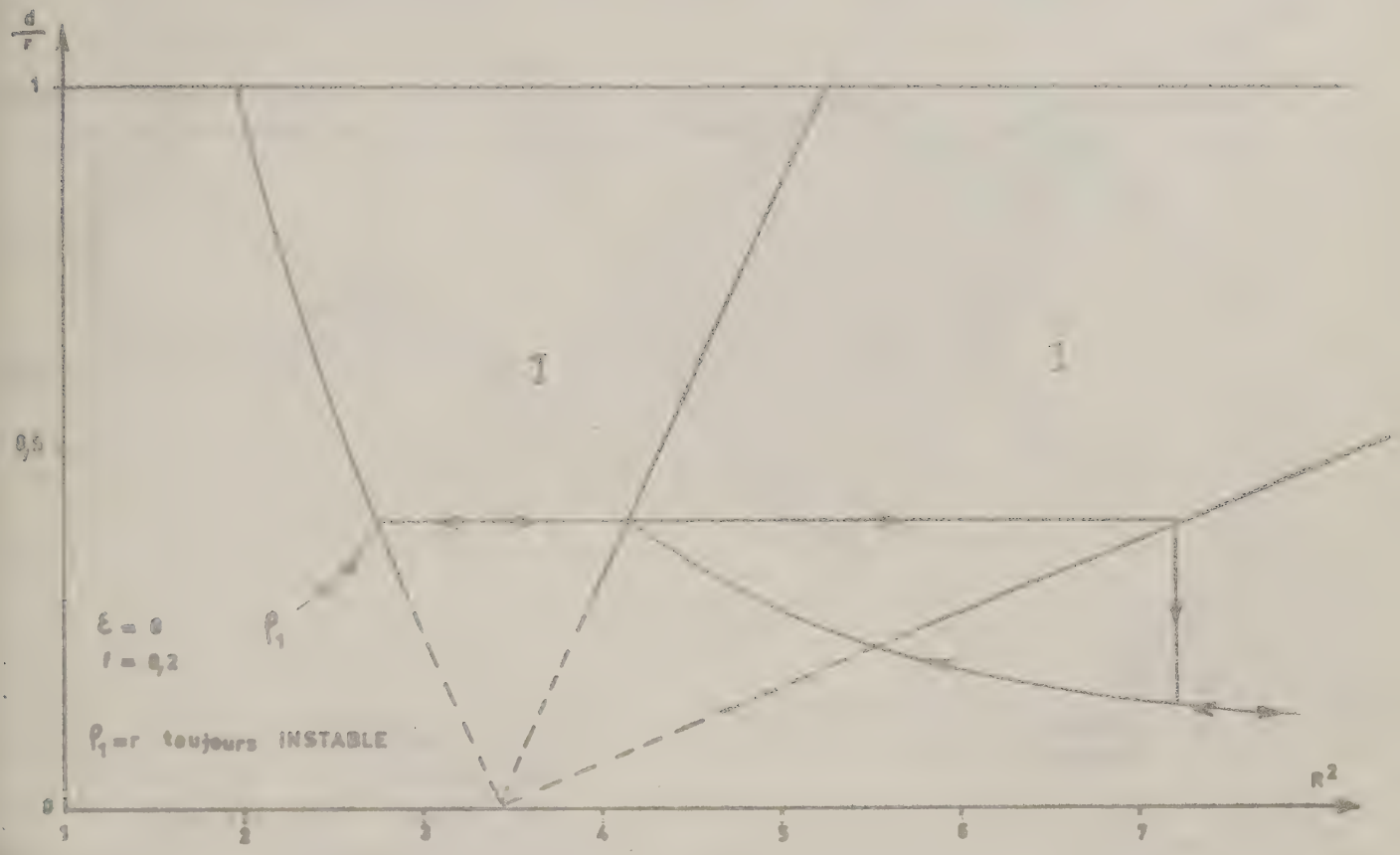
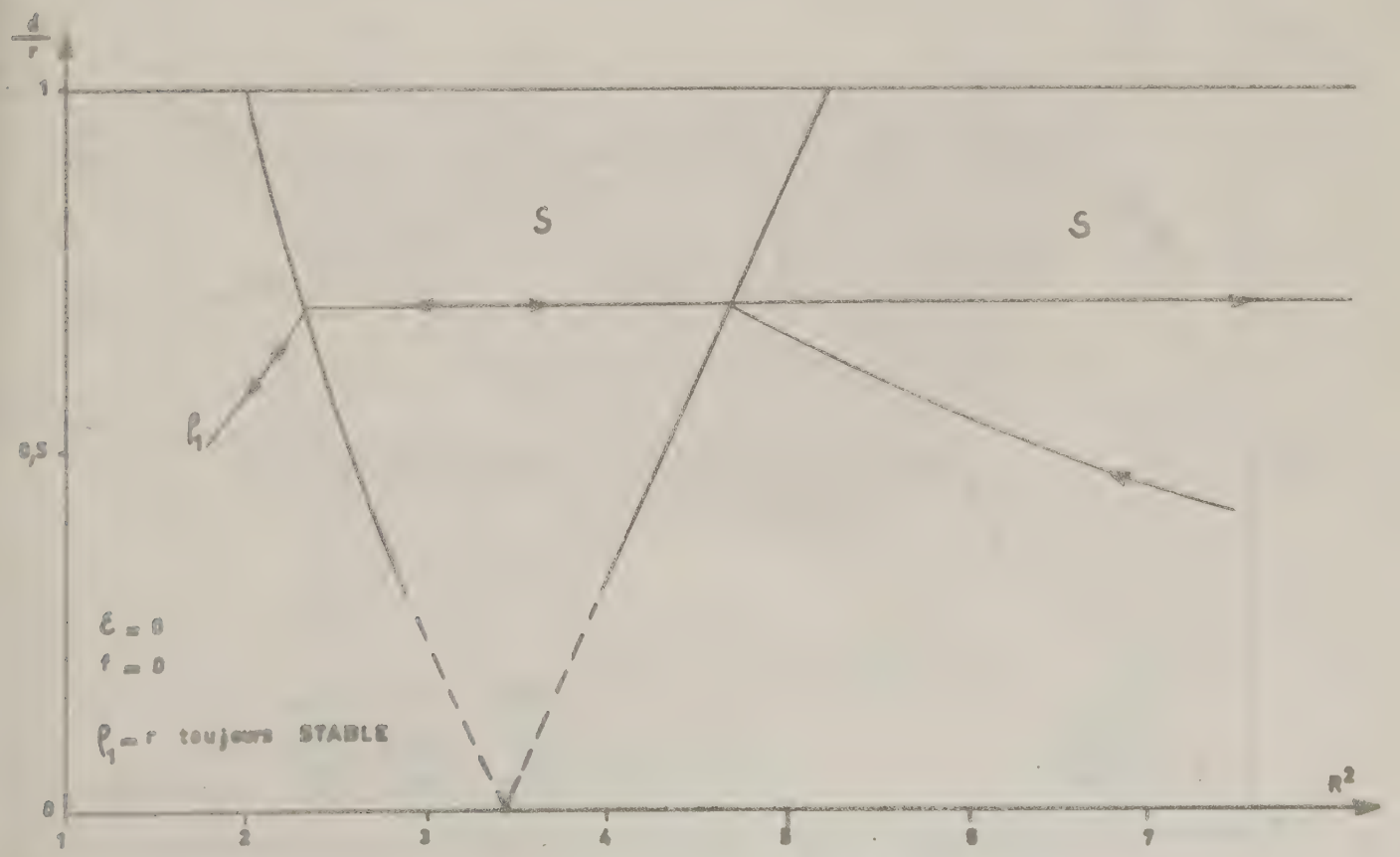
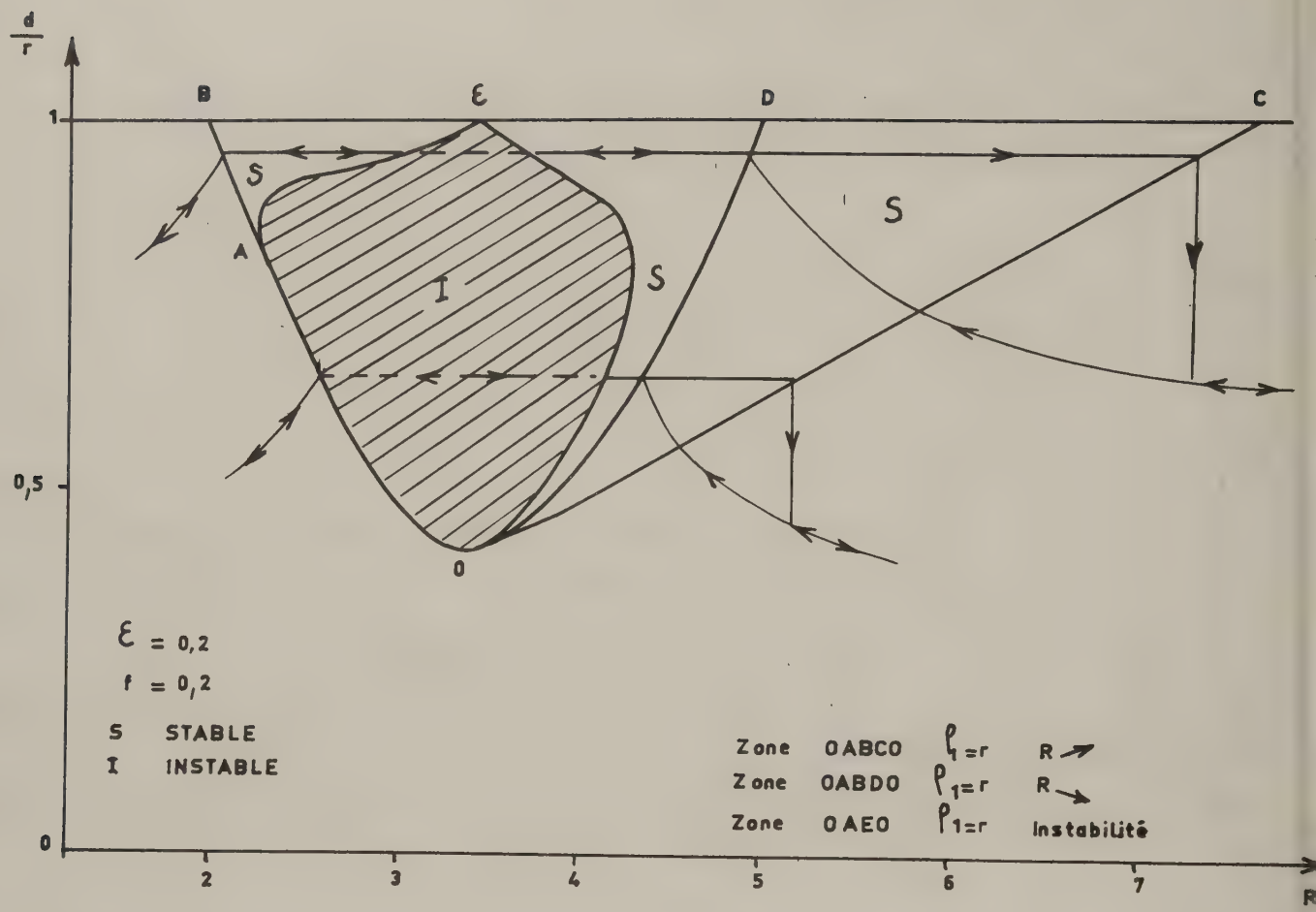

COURBES THEORIQUES ε = 0,2
f = 0,2
φ1
150
100
50
0
2
3
4
R²
R₃²
R₄²
R_c²
φ1

Fig (6)


d/r
1
0,5
0
I
I
ε = 0
f = 0,2
ρ1
ρ1 = r toujours INSTABLE
R²
1
2
3
4
5
6
7


d/r
1
0,5
0
S
S
ρ1
ε = 0
f = 0
ρ1 = r toujours STABLE
R²
1
2
3
4
5
6
7

Fig(7)


d/r
B
ε
D
C
1
S
A
I
S
S
0,5
0
ε = 0,2
f = 0,2
S STABLE
I INSTABLE
Zone OABCO ρ1 = r R
Zone OABDO ρ1 = r R
Zone OAEO ρ1 = r Instabilité
0
2
3
4
5
6
7
R

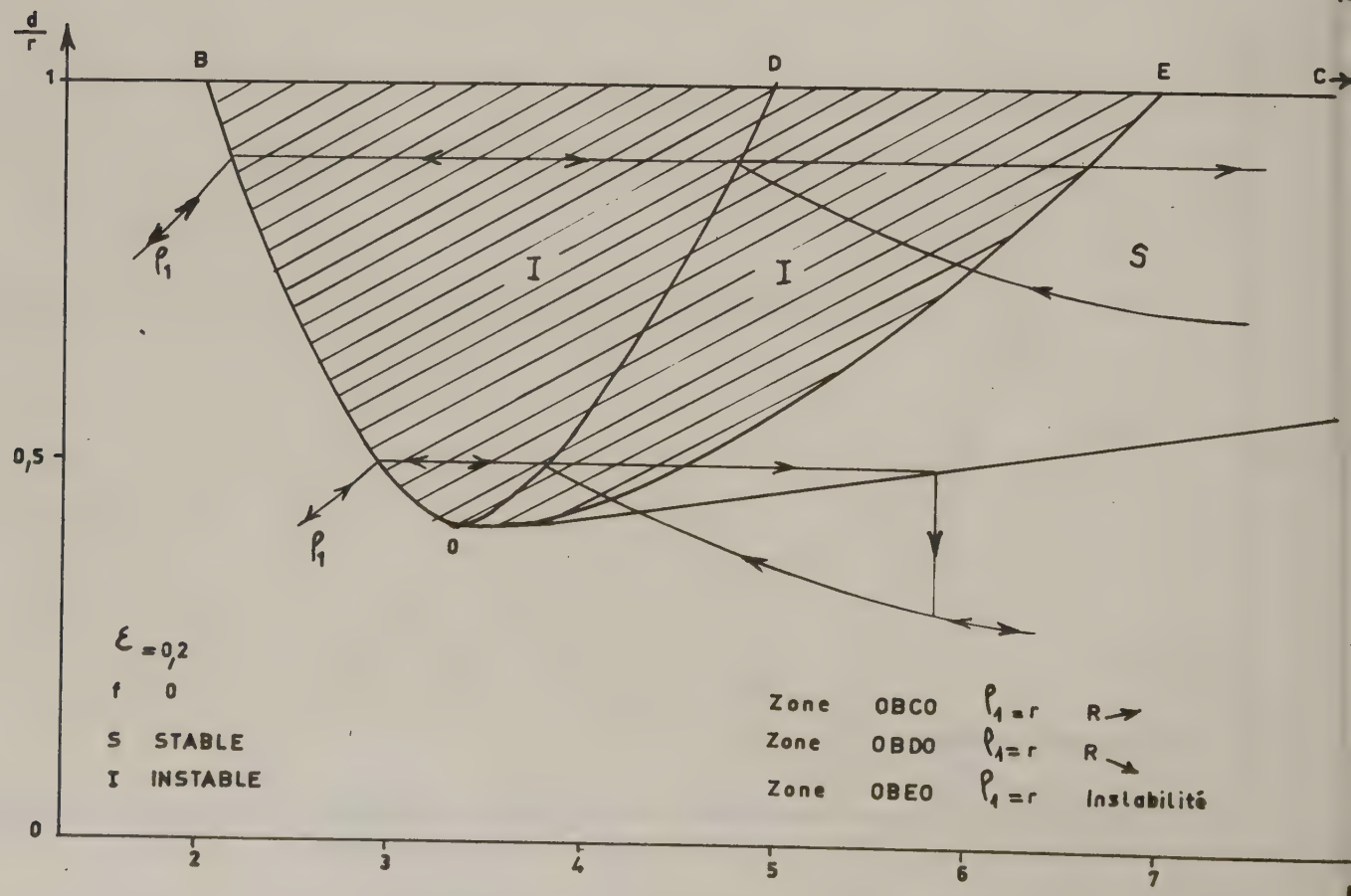
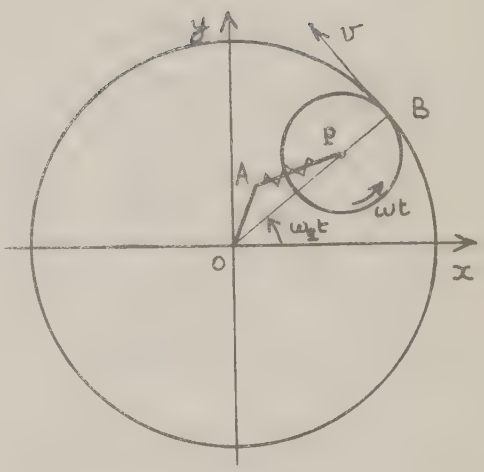

d/r
B
D
E
C
1
ρ1
I
I
S
0,5
ρ1
0
ε = 0,2
f 0
S STABLE
I INSTABLE
Zone OBCO ρ1 = r R
Zone OBDO ρ1 = r R
Zone OBEO ρ1 = r Instabilité
0
2
3
4
5
6
7

Fig (8)

3ème Partie - EFFET GYROSCOPIQUE - ETUDE DU ROULEMENT -

1 - CONDITION DE ROULEMENT SANS GLISSEMENT -

Pour cette étude, nous pouvons utiliser la représentation plane.



La masse (m) a un rayon non négligeable r_2 et tourne à vitesse constante ω.

A certaines vitesses de rotation ω, la masse roule sur le cylindre.

La condition de roulement sans glissement est :

$$\frac{V(\vec{B}) = 0}{V(\vec{B}) = (OP\ \omega_2 + PB\ \omega)\vec{v}}$$

or $OP = r \qquad PB = r_2$

d'où : $$\omega_2 = -\frac{r_2}{r}\,\omega \qquad (13)$$

Posons $-\dfrac{\omega_2}{\omega_o} = X$, nous avons $X = \dfrac{r_2}{r}\,R$

2 - CAS D'UN PENDULE -

2-1 Mise en équation

P est le centre de masse de la masse

$$\vec{OP} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y}$$

La force d'amortissement est :

$$F(\vec{P}) = -2\,\varepsilon\,m\,\omega_o\,V(\vec{P}) = -2\,\varepsilon\,m\,\omega_o(x'\vec{x} + y'\vec{y})$$

Appliquons les théorèmes généraux :

$$mx'' = -N\frac{x}{r} + T\frac{y}{r} - k(x - d\cos\omega t) - 2\,\varepsilon\, m\,\omega_o\, x' \qquad (14)$$

$$my'' = -N\frac{y}{r} - T\frac{x}{r} - k(y - d\sin\omega t) - 2\,\varepsilon\, m\,\omega_o\, y' \qquad (15)$$

2-2 Résolution

Si le roulement existe :

$$x = r\cos(\omega_2 t+\phi)$$
$$y = r\sin(\omega_2 t+\phi)$$

En multipliant l'équation (14) par x, l'équation (15) par y et en ajoutant, nous obtenons N.

En multipliant l'équation (14) par y, l'équation (15) par (-x) et en ajoutant, nous obtenons T.

Soit : $$\frac{N}{m\,\omega_o^2\, r} = \frac{\omega_2^2}{\omega_o^2} - 1 + \frac{d}{r}\cos\theta$$

$$\frac{T}{m\,\omega_o^2\, r} = -2\,\varepsilon\,\frac{\omega_2}{\omega_o} + \frac{d}{r}\sin\theta \qquad \text{avec } \theta = (\omega-\omega_2)t - \phi$$

En posant : $$-\frac{\omega_2}{\omega_o} = X = \frac{r_2}{r}R$$

$$\frac{N}{m\,\omega_o^2\, r} = X^2 - 1 + \frac{d}{r}\cos\theta$$

$$\frac{T}{m\,\omega_o^2\, r} = 2\,\varepsilon\, X + \frac{d}{r}\sin\theta$$

2-3 Discussion

Conditions pour qu'il y ait roulement :

$$N \geqslant 0\ , \quad |T| \leqslant fN \qquad \forall\, t$$

a) $N \geqslant 0 \quad \forall\, t$ entraine :

$$\frac{d}{r} \leqslant X^2 - 1$$

b) La relation $|T| \leqslant fN$ sera vérifiée $\forall$ t si, pour $0 < \theta < \pi$, $|T| \leqslant fN$

Soit : $2\,\varepsilon\,X + \frac{d}{r}\sin\theta \leqslant f(X^2-1) + f\,\frac{d}{r}\cos\theta$

ou : $\frac{d}{r}\sin(\theta-\psi) \leqslant \sin\psi\,(X^2-1) - 2\,\varepsilon\,X\cos\psi \qquad (f = \mathrm{tg}\,\psi)$

Cette relation sera vérifiée $\forall$ t si

$$\frac{d}{r} \leqslant \sin\psi\,(X^2-1) - 2\,\varepsilon\,X\cos\psi$$

$\sin\psi$ étant inférieur à 1, X et $\cos\psi$ étant positifs, la condition nécessaire et suffisante pour que la masse roule sur le cylindre est :

$$\boxed{\frac{d}{r} \leqslant \sin\psi\,(X^2-1) - 2\,\varepsilon\,X\cos\psi}$$

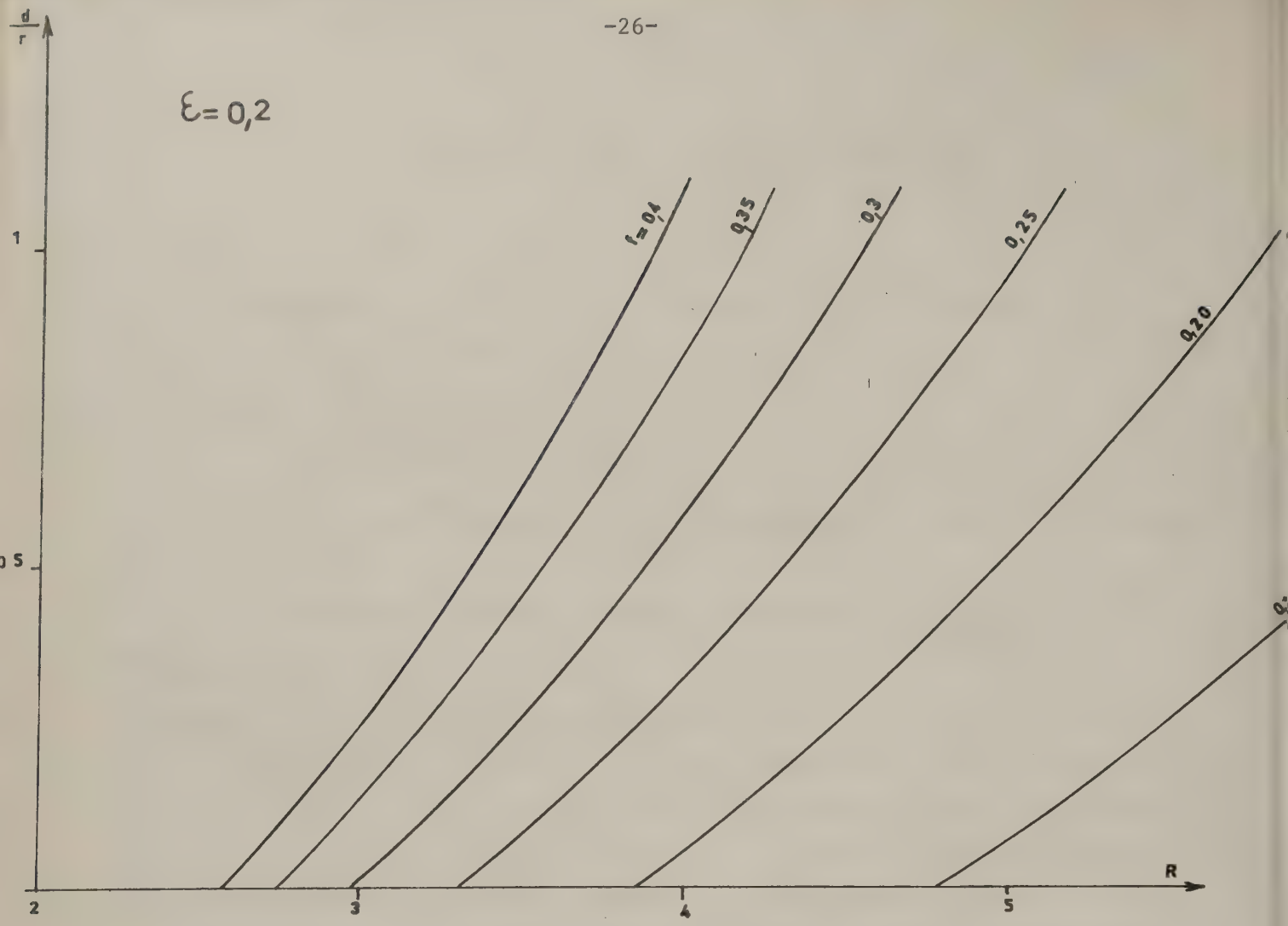
2-4 Résultats

Le résultat précédent nous a permis de tracer les courbes suivantes (figure 9), représentant les variations de l'expression "$\sin\psi\,(X^2-1) - 2\varepsilon X\cos\psi$" en fonction de R pour différentes valeurs du coefficient de frottement f et du coefficient d'amortissement ε. Nous avons pris r_2 = 22 mm, r = 35 mm, soit X = 0,63 R.

Pour des valeurs de R, f, ε données, la masse va donc rouler sans glisser sur le cylindre si $\frac{d}{r} < \sin\psi\,(X^2-1) - 2\,\varepsilon\,X\cos\psi$.

Les courbes correspondent donc au début du roulement.

Expérimentalement, pour deux valeurs différentes de f : [f ≃ 0,3 et f ≃ 0,4] et pour $\varepsilon \neq 0$, nous avons relevé les vitesses de rotation correspondant au début du roulement et ceci pour différents excentrements d. Nous constatons que les résultats concordent d'une manière satisfaisante.


d/r
ε = 0,2
f = 0,4
0,35
0,3
0,25
0,20
1
0,5
R
2
3
4
5

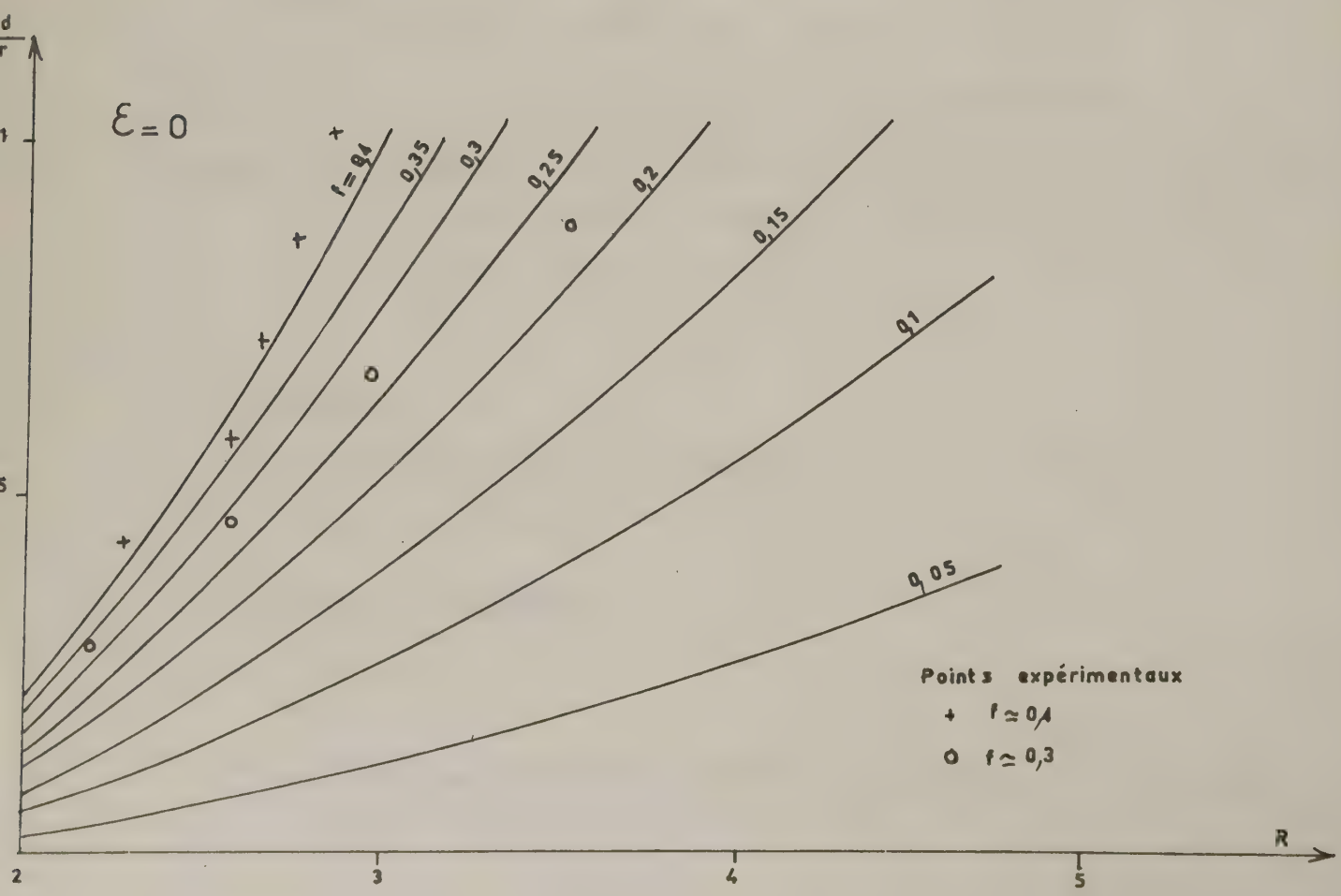
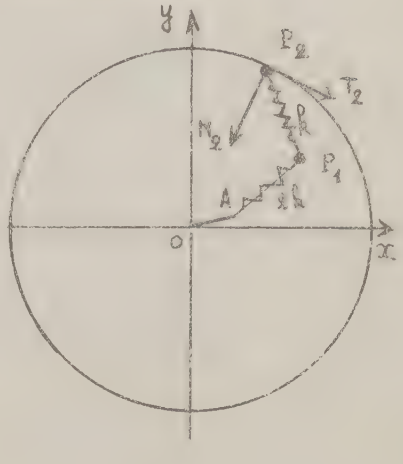

d/r
ε = 0
f = 0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
Points expérimentaux
+ f ≃ 0,4
o f ≃ 0,3
R
2
3
4
5

Fig (9)

3 - CAS DE DEUX PENDULES - SEULE LA MASSE (2) ROULE SUR LE CYLINDRE -

3-1 Mise en équations



Soient N_2 et T_2 les réactions normales et tangentielles au point de contact.

P_1 et P_2 sont les centres de masse des masses (1) et (2).

$$\vec{OP}_1 = x_1 \vec{x} + y_1 \vec{y}$$

$$\vec{OP}_2 = x_2 \vec{x} + y_2 \vec{y}$$

Appliquons les théorèmes généraux :

$$mx_1'' = -2k(x_1 - d\cos\omega t) + k(x_2 - x_1) - 2\varepsilon m\omega_o x_1' \qquad (16)$$

$$my_1'' = -2k(y_1 - d\sin\omega t) + k(y_2 - y_1) - 2\varepsilon m\omega_o y_1' \qquad (17)$$

$$mx_2'' = -N_2\frac{x_2}{r} + T_2\frac{y_2}{r} - k(x_2 - x_1) - 2\varepsilon m\omega_o x_2' \qquad (18)$$

$$my_2'' = -N_2\frac{y_2}{r} + T_2\frac{x_2}{r} - k(y_2 - y_1) - 2\varepsilon m\omega_o y_2' \qquad (19)$$

3-2 Résolution

Si le roulement existe :

$$x_2 = r\cos(\omega_2 t + \phi)$$

$$y_2 = r\sin(\omega_2 t + \phi)$$

Les équations (16) et (17) nous permettent de calculer x_1 et y_1 :

$$x_1 = A\cos(\omega_2 t + \phi - \phi_{11}) + B\cos(\omega t - \phi_{12})$$

$$y_1 = A\sin(\omega_2 t + \phi - \phi_{11}) + B\sin(\omega t - \phi_{12})$$

avec :

$$A = \frac{r}{\sqrt{(3-X^2)^2 + 4\varepsilon^2 X^2}} \qquad \operatorname{tg}\phi_{11} = \frac{-2\varepsilon X}{3-X^2}$$

$$B = \frac{2d}{\sqrt{(3-R^2)^2 + 4\varepsilon^2 R^2}} \qquad \operatorname{tg}\phi_{12} = \frac{2\varepsilon R}{3-R^2}$$

Des équations (18) et (19) nous pouvons tirer les valeurs de N_2 et T_2.

$$\frac{N_2}{m\,\omega_o^2\,r} = X^2 - 1 + \frac{A}{r}\cos\phi_{11} + \frac{B}{r}\cos\left[(\omega-\omega_2)t - \phi_{12} - \phi\right]$$

$$\frac{T_2}{m\,\omega_o^2\,r} = 2\,\varepsilon\,X - \frac{A}{r}\sin\phi_{11} + \frac{B}{r}\sin\left[(\omega-\omega_2)t - \phi_{12} - \phi\right]$$

Posons $(\omega-\omega_2)t - \phi_{12} - \phi = \theta_{12}$ et remplaçons A, B, $\cos\phi_{11}$, $\sin\phi_{11}$ par leurs valeurs, nous obtenons :

$$\frac{N_2}{m\,\omega_o^2\,r} = X^2 - 1 + \frac{3-X^2}{(3-X^2)^2 + 4\,\varepsilon^2X^2} + \frac{2\,d}{r}\,\frac{1}{\sqrt{(3-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2R^2}}\cos\theta_{12}$$

$$\frac{T_2}{m\,\omega_o^2\,r} = 2\,\varepsilon\left[X - \frac{X}{(3-X^2)^2 + 4\,\varepsilon^2X^2}\right] + \frac{2\,d}{r}\,\frac{1}{\sqrt{(3-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2R^2}}\sin\theta_{12}$$

3-3 Discussion

Conditions pour que seule la masse (2) roule.

a) Il faut que la masse (1) ne vienne pas en contact avec la paroi, c'est-à-dire :

$$x_1^2 + y_1^2 < r^2 \quad \forall\, t$$

Nous supposerons cette condition réalisée.

b) Il faut que la réaction normale soit positive :

$$N_2 \geqslant 0 \quad \forall\, t$$

c) Il faut que la réaction tangentielle vérifie l'inéquation :

$$|T_2| \leqslant f\,N_2 \quad \forall\, t$$

Posons :

$$F(X) = X^2 - 1 + \frac{3-X^2}{(3-X^2)^2 + 4\,\varepsilon^2X^2}$$

$$G(R) = \frac{2\,d}{r}\,\frac{1}{\sqrt{(3-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2R^2}}$$

$$H(X) = 2\,\varepsilon\,X\left[1 - \frac{1}{(3-X^2)^2 + 4\,\varepsilon^2X^2}\right]$$

G(R) est positif $\forall$ t, R

$$\frac{N_2}{m\,\omega_o^2\,r} = F(X) + G(R)\cos\theta_{12}$$

$$\frac{T_2}{m\,\omega_o^2\,r} = H(X) + G(R)\sin\theta_{12}$$

La condition $N_2 \geqslant 0 \quad \forall\, t$ entraine donc $F(X) \geqslant G(R)$

La condition $|T_2| \leqslant f\,N_2 \quad \forall\, t$ sera vérifiée si pour $0 < \theta_{12} < \pi$:

$$|H(X)| + G(R)\sin\theta_{12} \leqslant f\,F(X) + f\,G(R)\cos\theta_{12}$$

Soit : $G(R)\sin(\theta_{12}-\psi) \leqslant \sin\psi\,F(X) - \cos\psi\,|H(X)|$

Cette condition est vérifiée $\forall\, t$ si :

$$G(R) \leqslant \sin\psi\,F(X) - \cos\psi\,|H(X)|$$

Si cette inéquation est vérifiée, la condition $F(X) \geqslant G(R)$ est également vérifiée.

La condition nécessaire et suffisante pour que la masse (2) roule sur le cylindre est donc :

$$\boxed{G(R) \leqslant \sin\psi\,F(X) - \cos\psi\,|H(X)|}$$

3-4 Résultats

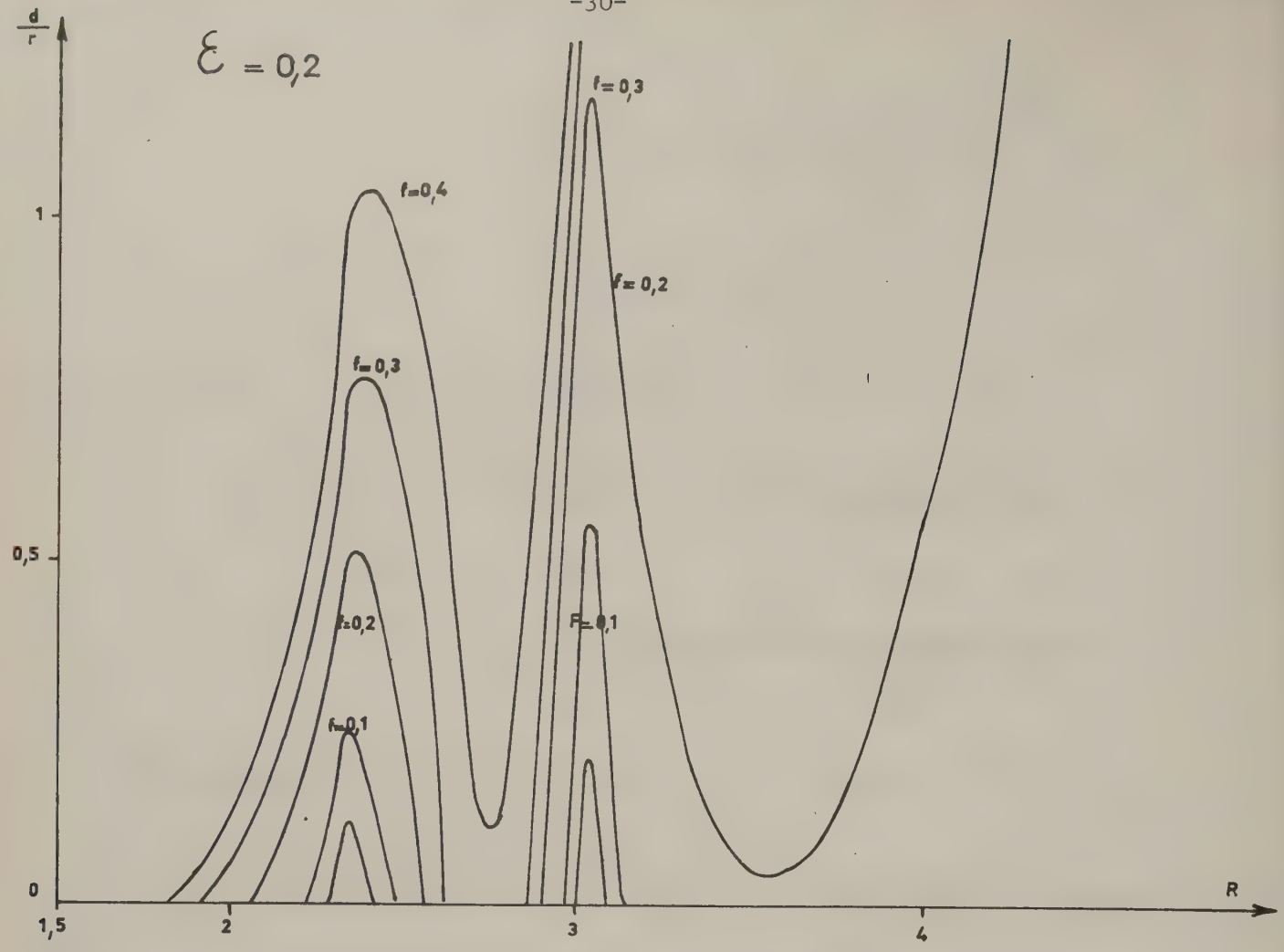
Comme dans le cas d'un pendule simple : nous avons tracé les courbes théoriques et expérimentales indiquant le début du roulement [figure 10].

Nous constatons que les courbes théoriques et expérimentales concordent assez mal, bien qu'ayant la même allure.

Ceci peut s'expliquer par le fait que la masse (1) qui est également en rotation dans le cylindre vient parfois en contact avec lui, ce qui perturbe le mouvement.

De plus, nous commettons également une erreur importante sur l'appréciation de la vitesse correspondant au roulement sans glissement de la masse.

L'étude théorique est faite en supposant que les masses restent dans un plan horizontal, alors que,expérimentalement, le système étant constitué de pendules, les masses ont un léger mouvement vertical qui est d'autant plus important que l'excentrement d est grand. Ceci explique le fait que l'écart entre les résultats théoriques et expérimentaux est plus grand quand $\frac{d}{r}$ augmente.


d/r
ℰ = 0,2
f=0,4
f=0,3
f=0,2
f=0,1
f=0,3
f=0,2
f=0,1
1
0,5
0
1,5
2
3
4
R

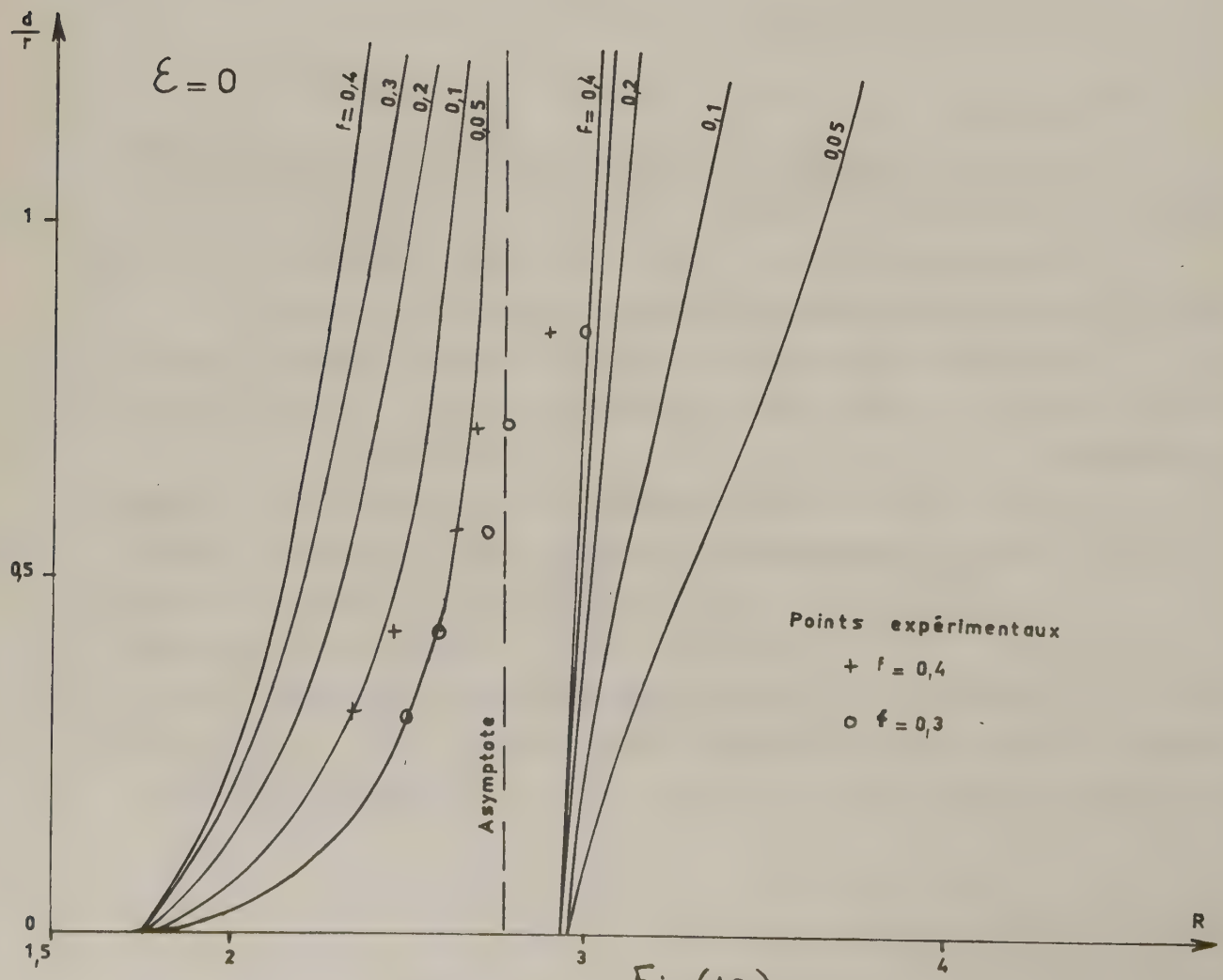
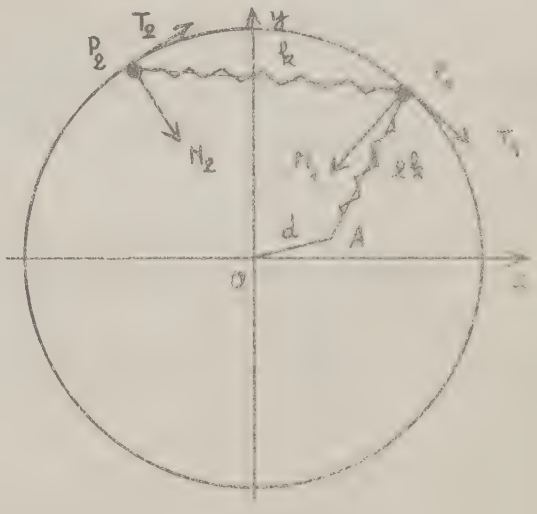

d/r
ℰ = 0
f=0,4
0,3
0,2
0,1
0,05
f=0,4
0,2
0,1
0,05
Asymptote
Points expérimentaux
+ f = 0,4
o f = 0,3
1
0,5
0
1,5
2
3
4
R

Fig (10)

4 - CAS D'UN DOUBLE PENDULE - LES DEUX MASSES ROULENT SUR LE CYLINDRE -

4-1 Mise en équations



Soient $\vec{N}_1$ et $\vec{T}_1$, $\vec{N}_2$ et $\vec{T}_2$ les réactions normales et tangentielles aux points de contact de la masse (1) et de la masse (2) avec le cylindre.

P_1 et P_2 sont les centres de masse des masses (1) et (2).

$$\vec{OP}_1 = x_1 \vec{x} + y_1 \vec{y}$$

$$\vec{OP}_2 = x_2 \vec{x} + y_2 \vec{y}$$

Appliquons les théorèmes généraux :

$$mx_1'' = - N_1 \frac{x_1}{r} + T_1 \frac{y_1}{r} - 2\, k(x_1 - d \cos \omega t) + k(x_2 - x_1) - 2\, \varepsilon\, m\, \omega_o\, x_1' \qquad (20)$$

$$my_1'' = - N_1 \frac{y_1}{r} - T_1 \frac{x_1}{r} - 2\, k(y_1 - d \sin \omega t) + k(y_2 - y_1) - 2\, \varepsilon\, m\, \omega_o\, y_1' \qquad (21)$$

$$mx_2'' = - N_2 \frac{x_2}{r} + T_2 \frac{y_2}{r} - k(x_2 - x_1) - 2\, \varepsilon\, m\, \omega_o\, x_2' \qquad (22)$$

$$my_2'' = - N_2 \frac{y_2}{r} - T_2 \frac{x_2}{r} - k(y_2 - y_1) - 2\, \varepsilon\, m\, \omega_o\, y_2' \qquad (23)$$

4-2 Résolution

Si le roulement existe :

$$x_1 = r \cos(\omega_2 t + \phi_1) \qquad x_2 = r \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$y_1 = r \sin(\omega_2 t + \phi_1) \qquad y_2 = r \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Nous pouvons donc tirer des équations du mouvement : N_1, T_1, N_2 et T_2

$$\frac{N_1}{m\, \omega_o^2\, r} = \frac{\omega_2^2}{\omega_o^2} - 3 + \cos(\phi_2 - \phi_1) + \frac{2\, d}{r} \cos \theta_1$$

$$\frac{T_1}{m\, \omega_o^2\, r} = 2\, \varepsilon\, \frac{r_2}{r} R - \sin(\phi_2 - \phi_1) + \frac{2\, d}{r} \sin \theta_1$$

$$\frac{N_2}{m\, \omega_o^2\, r} = \frac{\omega_2^2}{\omega_o^2} - 1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\frac{T_2}{m\, \omega_o^2\, r} = 2\, \varepsilon\, \frac{r_2}{r} R + \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

Avec $\theta_1 = (\omega-\omega_2)t - \phi_1$

Etant donné que les deux masses roulent sur le cylindre, nous ne pouvons avoir que $(\phi_2-\phi_1) = 0$, ce qui est vérifié expérimentalement.

Posons :

$$-\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{r_2}{r} R = X$$

D'où :

$$\frac{N_1}{m\,\omega_o^2\,r} = X^2 - 2 + 2\,\frac{d}{r}\cos\theta_1$$

$$\frac{T_1}{m\,\omega_o^2\,r} = 2\,\varepsilon\,X + 2\,\frac{d}{r}\sin\theta_1$$

$$\frac{N_2}{m\,\omega_o^2\,r} = X^2$$

$$\frac{T_2}{m\,\omega_o^2\,r} = 2\,\varepsilon\,X$$

4-3 Discussion

Conditions pour que les deux masses roulent sur le cylindre :

$$N_2 \geqslant 0, \quad |T_2| \leqslant f\,N_2, \quad N_1 \geqslant 0, \quad |T_1| \leqslant f\,N_1 \qquad \forall\, t$$

$N_2 \geqslant 0$ cette condition est toujours vérifiée

$|T_2| \leqslant f\,N_2$ entraine $X \geqslant \frac{2\,\varepsilon}{f}$

$N_1 \geqslant 0 \quad \forall\, t$ entraine $\frac{2\,d}{r} \leqslant X^2 - 2$

$|T_1| \leqslant f\,N_1$ entraine $\frac{2\,d}{r} \leqslant \sin\psi\,(X^2-2) - 2\,\varepsilon\,X\cos\psi$

Etant donné que $f = \mathrm{tg}\,\psi \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$

Les conditions à vérifier sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} 2\,\frac{d}{r} \leqslant \sin\psi\,(X^2-2) - 2\,\varepsilon\,X\cos\psi \\ X \geqslant 2\,\frac{\varepsilon}{f} \end{array}}$$

4-4 Résultats

Comme dans les autres cas, nous avons tracé les courbes théoriques et expérimentales indiquant le début du roulement [figure 11].

Nous constatons encore que les résultats théoriques et expérimentaux concordent assez mal.

Comme dans le cas précédent, [§ 34], nous commettons une erreur importante sur la vitesse correspondant au début du roulement sans glissement. Le mouvement vertical des masses entraine un écart plus grand entre les résultats quand $\frac{d}{r}$ augmente.

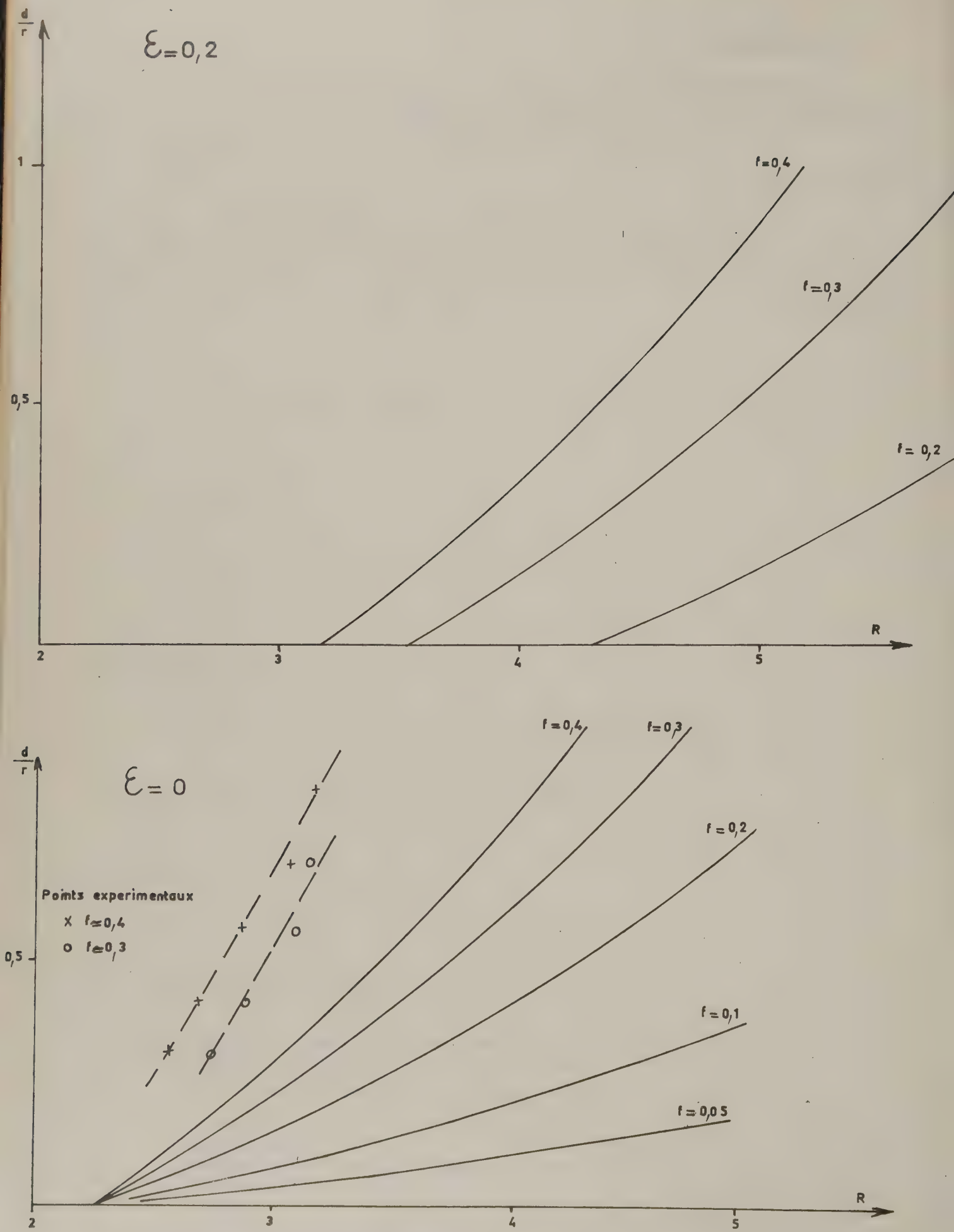

d/r
ε=0,2
1
0,5
f=0,4
f=0,3
f= 0,2
R
2
3
4
5
d/r
ε= 0
f=0,4
f=0,3
f=0,2
f=0,1
f=0,05
Points experimentaux
X f≃0,4
o f≃0,3
0,5
R
2
3
4
5

Fig (11)

4ème Partie - ETUDE DES CHOCS -

Nous allons considérer le cas où l'amortissement est nul.

1 - HYPOTHESES -

1-1 Discontinuité de vitesse

A l'instant du choc, la position de la masse ne varie pas, seule la vitesse change. La discontinuité de vitesse ne peut intervenir que sur les déphasages des termes relatifs aux oscillations libres [4].

1-2 Périodicité des chocs

Nous étudions uniquement les chocs périodiques. Nous poserons $\tau_1 = \omega_o T_1$, la période réduite des chocs. Nous supposerons que le premier choc se produit à l'instant $\tau = 0$.

1er choc $\tau = 0$	$\tau = 0^-$ juste avant le premier choc $\tau = 0^+$ juste après le premier choc
2ème choc $\tau = \tau_1$	$\tau = \tau_1^-$ juste avant le deuxième choc $\tau = \tau_1^+$ juste après le deuxième choc

1-3 Conditions initiales

Nous supposerons que, pour le premier choc, la position de la masse est définie par :

$$u = u_o = u_{o+} = u_{o-} = r \qquad (r : \text{rayon du cylindre})$$

Pour cela, nous allons introduire un déphasage ϕ sur l'excitation. L'équation du mouvement devient donc :

$$\ddot{u} + u = d\, e^{j(R\tau+\phi)} \tag{40}$$

Nous allons mettre la vitesse initiale sous la forme :

$$\dot{u}_o = V_{NO} + j\, V_{TO}$$

Soit : $\dot{u}_{o-} = V_{NO-} + j\ V_{TO-}$ (41)

$\dot{u}_{o+} = V_{NO+} + j\ V_{TO+}$ (42)

Comme $u_{o+} = u_{o-} = r$, réel, V_{NO} et V_{TO} sont les vitesses normale et tangentielle à l'instant du premier choc.

1-4 Coefficient de restitution

Les chocs n'étant pas parfaits, nous allons introduire un coefficient de restitution de vitesse suivant la normale au cylindre : R_N, qui dépend de la nature des matériaux et du système étudié.

donc : $V_{NO+} = - R_N\ V_{NO-}$ (43)

De plus, pour tenir compte du frottement et de la rotation de la masse, nous introduisons un coefficient de restitution de vitesse suivant la tangente au cylindre : R_T.

donc : $V_{TO+} = R_T\ V_{TO-}$ (44)

Ce coefficient de restitution de vitesse R_T dépend du coefficient de restitution de vitesse R_N, du coefficient de frottement f et de la vitesse avant le choc (cf Annexe 2-1).

$$R_T = 1 + \varepsilon\ f(R_N+1)\ \frac{V_{NO-}}{V_{TO-}} \qquad \varepsilon = \pm 1 \tag{45}$$

2 - EQUATIONS -

La solution générale de l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$u = \frac{d}{1-R^2}\ e^{j(R\tau+\phi)} + a_1\ e^{j(\tau+\psi_1)} + a_2\ e^{-j(\tau+\psi_2)} \tag{46}$$

où a_1 et a_2 sont des constantes réelles positives ou nulles.

Nous poserons :

$$a_1\ e^{j\psi_1} + a_2\ e^{-j\psi_2} = \rho\ e^{-j\theta} \qquad \rho \text{ réel} > 0$$

Les conditions initiales, les conditions de périodicité, et les relations entre vitesses incidentes et réfléchies, nous permettent d'écrire le système d'équations suivant :

$$u_o = r$$

$$u_{o-} = u_{o+}$$

$$u_{\tau_1+} = u_{o+}\, e^{jR\tau_1}$$

$$\dot{u}_{\tau_1+} = \dot{u}_{o+}\, e^{jR\tau_1}$$

$$V_{NO+} = -\, R_N\, V_{NO-}$$

$$V_{TO+} = R_T\, V_{TO-}$$

En résolvant ce système d'équations (cf Annexe 2-2), nous obtenons un nouveau système d'équations :

$$(1+R_N)\, A\, \rho \sin\theta + (1 - R_N)\, B\, \rho \cos\theta = 0 \qquad (47)$$

$$-\left[2B + \varepsilon f(R_N+1)A\right] \rho \sin\theta + \varepsilon f(R_N+1)\, B\, \rho \cos\theta = 0 \qquad (48)$$

avec : $A = R \sin\tau_1 - \sin R\tau_1$ $\qquad B = \cos\tau_1 - \cos R\tau_1$

Pour que ce système admette des solutions $\rho \sin\theta$ et $\rho\cos\theta$ différentes de zéro, il faut que :

$$\boxed{B\left[(1-R_N)B + \varepsilon f(R_N+1)A\right] = 0} \qquad (49)$$

La période des chocs est donc donnée par :

- soit $B = 0$
- soit $(1-R_N)B + \varepsilon f(R_N+1)A = 0$ (50)

3 - DISCUSSION -

Nous ne considérerons ici que les cas généraux, les cas particuliers : $R = 1$, $\rho = 0$, $\sin\tau_1 = 0$, sont étudiés en annexe 2-5.

D'après les équations (47) et (48), suivant les valeurs de R_N et de f, nous obtenons différents cas.

3-1 Choc imparfait

3-1-1 $R_N < 1$, $f \neq 0$

Nous avons :

soit $\cos\tau_1 = \cos R\tau_1$
$\sin\theta = 0$

soit $(1-R_N)B + \varepsilon f(R_N+1)A = 0$
$\mathrm{tg}\,\theta = \varepsilon f$

3-1-2 $R_N < 1$, $f = 0$

Nous avons :

$$\cos \tau_1 = \cos R\,\tau_1$$
$$\sin \theta = 0$$

3-1-3 $R_N = 1$, $f \neq 0$

Nous avons :

soit
$$\cos \tau_1 = \cos R\,\tau_1$$
$$\sin \theta = 0$$

soit
$$R \sin \tau_1 = \sin R\,\tau_1$$
$$\operatorname{tg} \theta = \varepsilon f$$

3-2 Choc parfait $R_N = 1$, $f = 0$

La seule condition est : $\sin \theta = 0$

4 - CHOC PARFAIT -

Nous avons vu que la seule condition est :

$$\sin \theta = 0$$

Nous avons donc également $\sin \phi = 0$ et $\phi = k\pi$.

La période des chocs peut donc être quelconque quelle que soit la vitesse de rotation.

Cependant, il faut que le choc se produise à l'intérieur du cylindre, et que la masse reste à l'intérieur du cylindre entre deux chocs consécutifs.

Il faut donc que :

$V_{NO^+} < 0$ d'après les conditions initiales choisies

et $|u| < r \quad \forall\ 0 < \tau < \tau_1$

cf Annexe 2-3, nous avons :

$$V_{NO^+} = \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2} \right] \frac{\cos R\,\tau_1 - \cos \tau_1}{\sin \tau_1}$$

$$u = \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\, e^{jR\tau} + \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2} \right] \frac{\sin (\tau_1 - \tau) + e^{jR\tau_1} \sin \tau}{\sin \tau_1}$$

- Si R est fixé, V_{NO^+} change de signe pour :

$$\tau_1 = \frac{2\,n\,\pi}{R \pm 1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2\,\pi}{R\,\tau_1} = \frac{R \pm 1}{n\,R}$$

$$\text{et} \quad \tau_1 = n\,\pi \qquad \text{ou} \qquad \frac{2\,\pi}{R\,\tau_1} = \frac{2}{n\,R} \qquad n \text{ entier} \gtrless 0$$

- <u>Si τ_1 est fixé, V_{NO^+} change de signe pour :</u>

$R = \sqrt{1 - \frac{d}{r}}$ et $R = 1$ si k pair.

$R = 1$ et $R = \sqrt{1 + \frac{d}{r}}$ si k impair

Ceci nous permet de déterminer, dans le plan $\left[R, \frac{2\,\pi}{R\,\tau_1}\right]$, les zones où V_{NO^+} est négatif.

Il faut, de plus, qu'à l'intérieur de ces zones la condition $|u| < r$ $\forall\ 0 < \tau < \tau_1$ soit vérifiée.

Nous avons vérifié cette dernière condition :

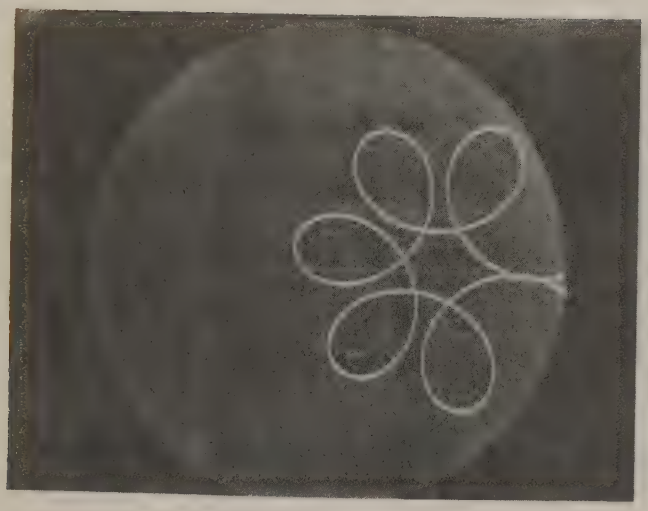
1°) <u>Numériquement à l'ordinateur</u> et nous obtenons les zones indiquées sur le graphique, figure (15).

2°) <u>Au calculateur analogique</u> du laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M. (cf Annexe 2-3-1).

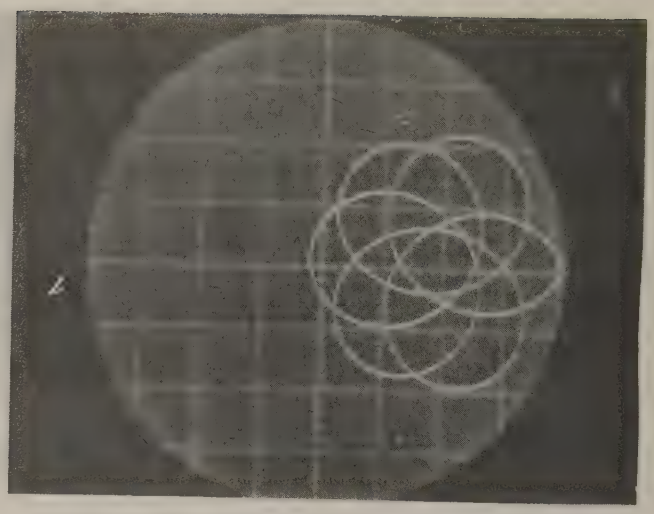
Nous avons tracé les trajectoires de la masse dans le plan mobile tournant à la vitesse d'entrainement du pendule, ceci pour quelques valeurs discrètes de la vitesse de rotation R, et de la période réduite des chocs τ_1, cf figures (12) et (13).

Les deux vérifications concordent parfaitement.

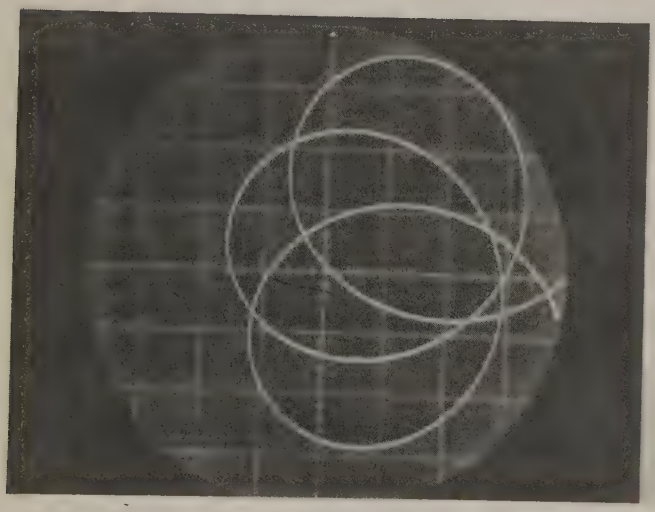
Nous pouvons également étudier les trajectoires, soit analytiquement, soit géométriquement (cf Annexe 2-3-2).



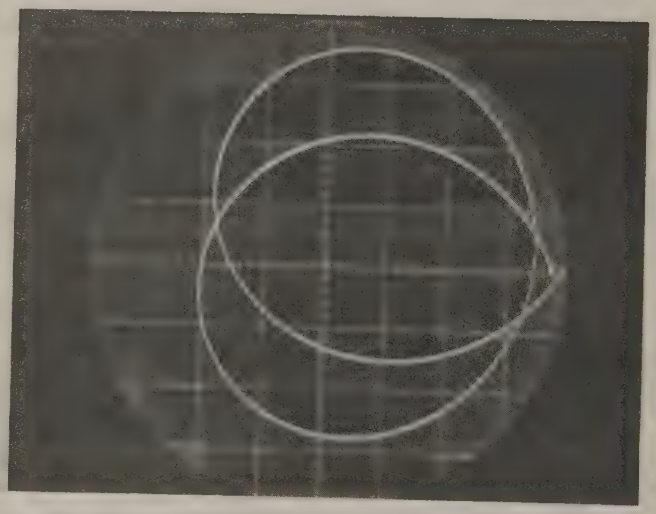
$R=0{,}7 \quad \frac{2\pi}{R\tau_1}=0{,}52 \quad 5\pi<\tau_1<6\pi$



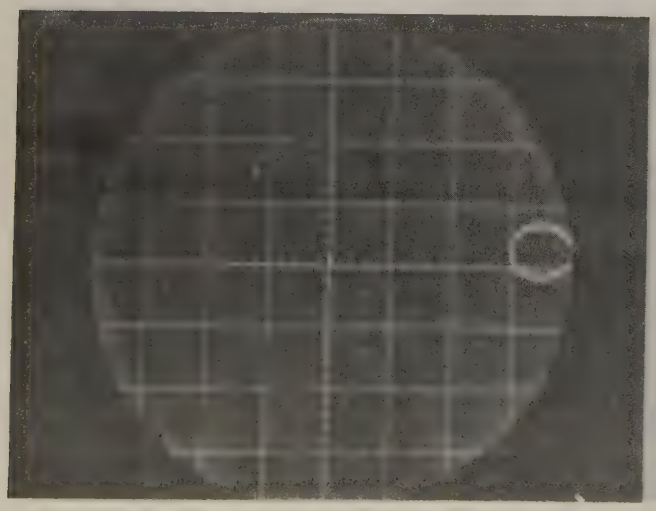
$R=0{,}7 \quad \frac{2\pi}{R\tau_1}=0{,}48 \quad 5\pi<\tau_1<6\pi$



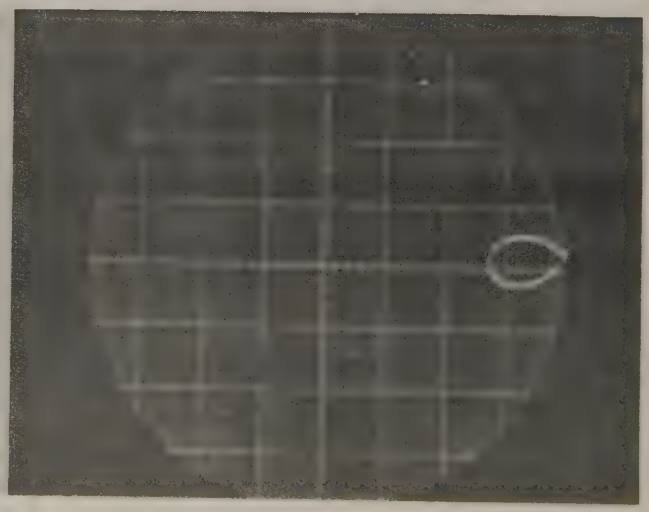
$R=0{,}7 \quad \frac{2\pi}{R\tau_1}=0{,}87 \quad 3\pi<\tau_1<4\pi$



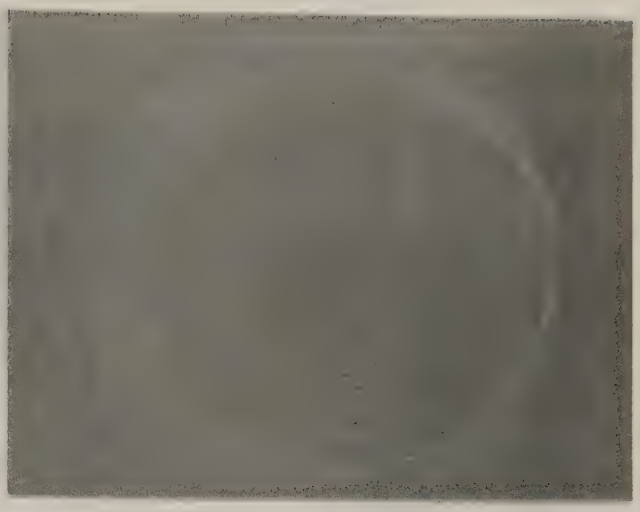
$R=0{,}7 \quad \frac{2\pi}{R\tau_1}=1{,}32 \quad 2\pi<\tau_1<3\pi$



$R=0{,}9 \quad \frac{2\pi}{R\tau_1}=3 \quad 0<\tau_1<\pi$

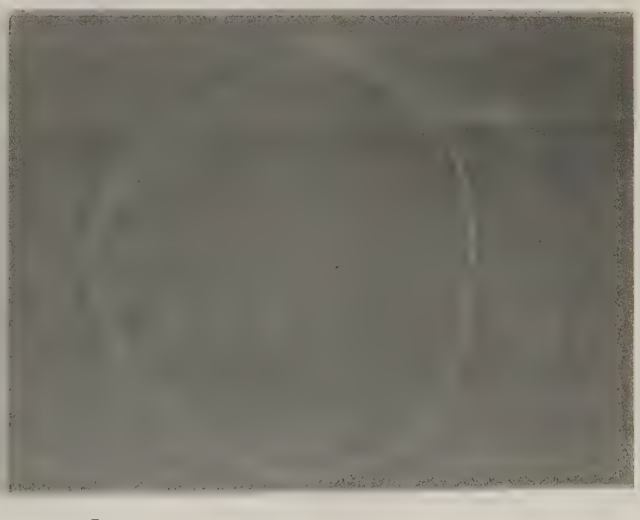


$R=1{,}05 \quad \frac{2\pi}{R\tau_1}=2{,}5 \quad 0<\tau_1<\pi$



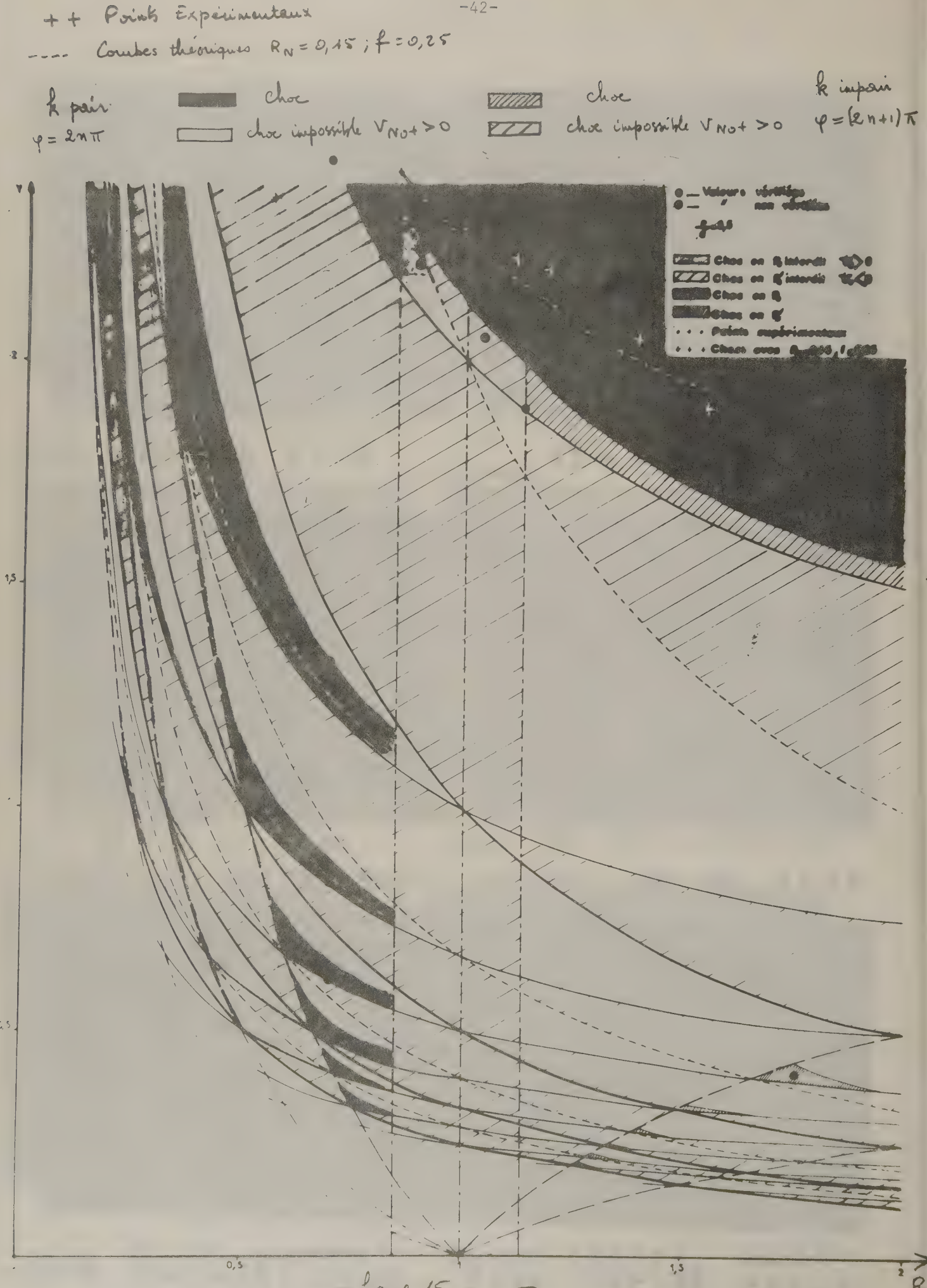
$R = 1{,}05$ $\frac{2\pi}{R\tau_1} = 2{,}05$ et $2{,}5$ courbe fermée $R = 1{,}3$ $\frac{2\pi}{R\tau_1} = 1{,}90$ $0 < \tau_1 < \pi$

$R = 1{,}3$ $\frac{2\pi}{R\tau_1} = 3{,}90$ $0 < \tau_1 < \pi$ $R = 0{,}7$ $\frac{2\pi}{R\tau_1} = 1{,}22$ Choc rasant



k : impair $R = 1{,}75$ $\frac{2\pi}{R\tau_1} = 1{,}80$ $0 < \tau_1 < \pi$

k : impair $R = 1{,}75$ $\frac{2\pi}{R\tau_1} = 0{,}42$ $2\pi < \tau_1 < 3\pi$


+ + Points Expérimentaux
---- Courbes théoriques $R_N = 0,15$; $f = 0,25$
k pair
$\varphi = 2n\pi$
choc
choc impossible $V_{N0+} > 0$
choc
choc impossible $V_{N0+} > 0$
k impair
$\varphi = (2n+1)\pi$
V
R
0,5
1
1,5
2

— figure 15 —

5 - CHOC IMPARFAIT -

5-1 Résolution

Nous avons dans ce cas :

$$(1-R_N)\ (\cos \tau_1 - \cos R\ \tau_1) + f(R_N+1)\ (R \sin \tau_1 - \sin R\ \tau_1) = 0 \quad (50)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \varepsilon f \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

La résolution de l'équation (50) nous permet : R_N, f et ε étant fixés, de déterminer la période réduite τ_1 des chocs.

L'équation $\operatorname{tg} \theta = \varepsilon\ f$, en posant $f = \operatorname{tg} \psi$, donne :

$$\theta = \varepsilon\ \psi + n\ \pi$$

Le déphasage ϕ entre l'excitation et la masse est donné par :

$$\sin(\phi + \varepsilon\ \psi) = \frac{1-R^2}{d/r} \sin \varepsilon\ \psi$$

Les autres inconnues peuvent s'en déduire facilement (cf Annexe 2-4-1).

5-2 Conditions pour que le choc existe

5-2-1 $-1 < \sin(\phi + \varepsilon\ \psi) < +1$

Soit $1 - \dfrac{d}{r \sin \psi} < R^2 < 1 + \dfrac{d}{r \sin \psi}$

5-2-2 Il faut que la vitesse de glissement U à l'instant du choc vérifie la condition $\varepsilon\ U < 0$ (cf Annexe 2-1).

5-2-3 Il faut que la masse reste à l'intérieur du cylindre, entre deux chocs consécutifs.

Soit $|u| < r \qquad \forall\ 0 < \tau < \tau_1$

5-3 Résultats

La résolution de l'équation donnant la période des chocs, ainsi que la vérification des conditions, ne peut se faire qu'à l'aide de l'ordinateur.

Pour la résolution numérique, nous avons choisi les valeurs suivantes pour les paramètres.

- $\dfrac{d}{r} = 0{,}3$: (r_2 = 22 mm, r = 35 mm, d = 10,5 mm)

- f = 0,25 : valeur moyenne obtenue à partir d'autres expériences

- $0,1 < R_N < 0,5$: des mesures expérimentales, faites sur le dispositif étudié, nous ont donné un coefficient de restitution de vitesse R_N voisin de 0,2.

Pour $\varepsilon = +1$, nous constatons qu'il n'y a pas de choc possible, l'une des conditions $\varepsilon U < 0$ ou $|u| < r$ n'est pas vérifiée.

Pour $\varepsilon = -1$, nous obtenons les résultats, figure (14), dans le plan $\left[R, \frac{2\pi}{R\tau_1}\right]$.

Nous obtenons trois réseaux de courbes.

1) $0 < \tau_1 < 2\pi$ ou $\frac{2\pi}{R\tau_1} > \frac{1}{R}$ réseau I

Les chocs sont possibles pour :

$$\sqrt{1 - \frac{d}{r}} < R < \sqrt{1 + \frac{d}{r \sin\psi}}$$

2) $2\pi < \tau_1 < 3\pi$ ou $\frac{2}{3R} < \frac{2\pi}{R\tau_1} < \frac{1}{R}$ réseau II

Les chocs sont possibles pour :

$$R < \sqrt{1 - \frac{d}{r}}$$

3) $3\pi < \tau_1 < 4\pi$ ou $\frac{1}{2R} < \frac{2\pi}{R\tau_1} < \frac{2}{3R}$ réseau III

Les chocs sont possibles pour :

$$R < \sqrt{1 - \frac{d}{r}}$$

Nous avons porté sur la même figure (14) les points expérimentaux obtenus. Nous constatons que, pour les valeurs de R_N voisines de 0,2, la courbe expérimentale suit parfaitement la courbe théorique dans le réseau I.

Pour $R < \sqrt{1 - \frac{d}{r}}$ nous n'avons pas obtenu de points expérimentaux.

5-4 Etude du déphasage

Nous avons vu que le déphasage ϕ entre l'excitation et la masse est donné par l'équation :

$$\sin(\phi + \varepsilon\psi) = \frac{1-R^2}{d/r} \sin \varepsilon\psi$$

Pour que les chocs soient possibles, il faut que $\varepsilon = -1$.

d'où : $$\sin(\varphi - \psi) = \frac{R^2-1}{d/r} \sin\psi$$

Pour le réseau I, les chocs existent pour :

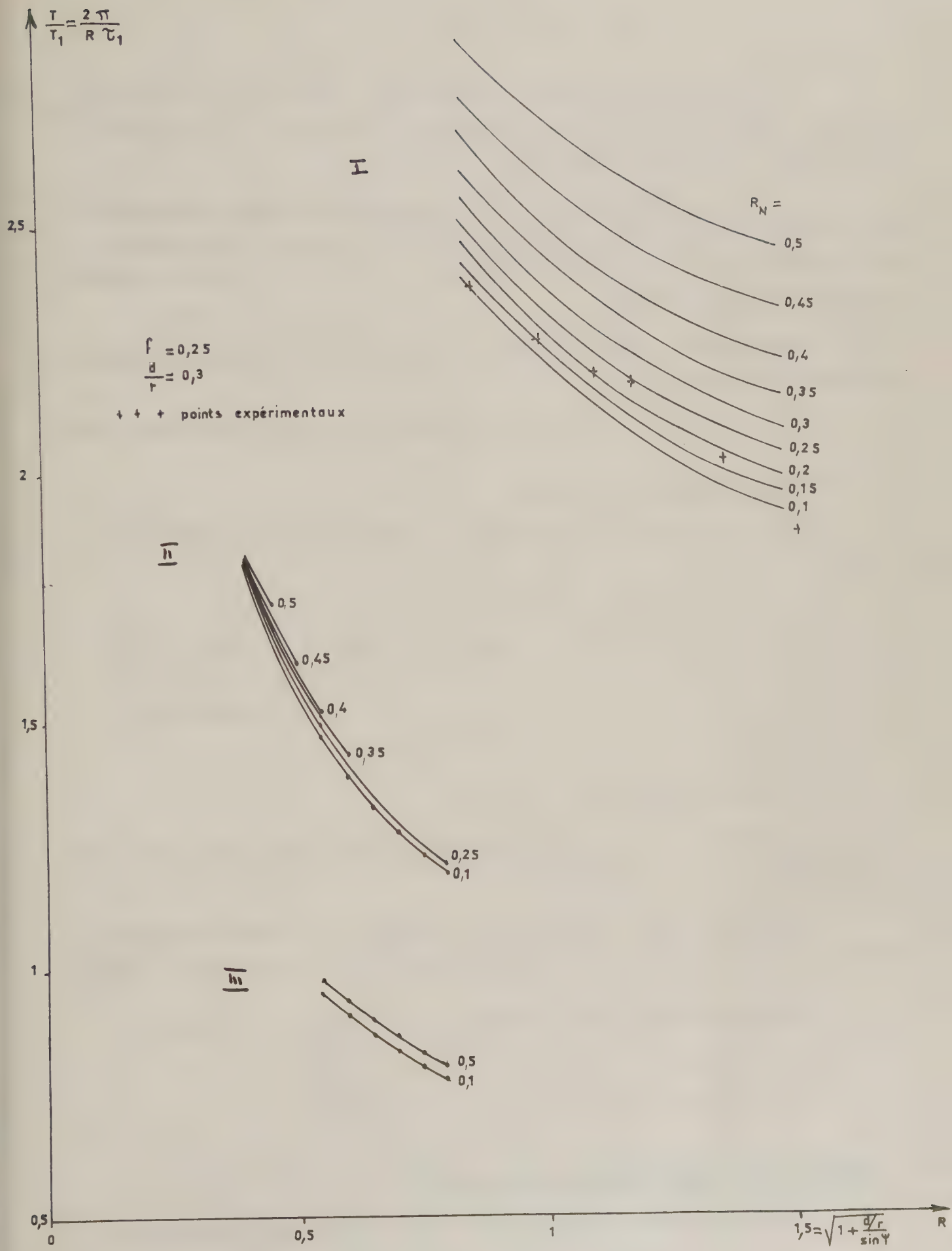

$\frac{T}{T_1} = \frac{2\pi}{R\,\tau_1}$
I
II
III
R_N =
0,5
0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
f = 0,25
$\frac{d}{r}$ = 0,3
+ + + points expérimentaux
0,5
0,45
0,4
0,35
0,25
0,1
0,5
0,1
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0,5
1
$1,5 = \sqrt{1 + \frac{d/r}{\sin\psi}}$
R

Fig (14)

$$\sqrt{1 - \frac{d}{r}} < R < \sqrt{1 + \frac{d}{r \sin \psi}}$$

Dans le cas du frottement de la masse sur le cylindre, [cf 2ème Partie § 12], si l'amortissement est nul, le déphasage est donné par la même relation et le contact existe pour la même gamme de vitesse.

Donc, pour le système étudié dans la même gamme de vitesse de rotation, nous pouvons avoir deux régimes permanents (chocs périodiques ou frottement). Pour une même vitesse de rotation, le déphasage à l'instant du choc est le même que dans le cas de frottement.

Nous obtenons, soit l'un, soit l'autre des régimes permanents, suivant les conditions initiales.

Nous pouvons aussi étudier la trajectoire de la masse (cf Annexe 2-4-2).

5-5 Cas particulier : choc rasant

Dans la discussion [§ 3], suivant les valeurs de R_N et f, nous avons obtenu :

$$B = 0 \quad \text{et} \quad \sin \theta = 0$$

Soit : $\cos \tau_1 = \cos R \tau_1$ ou $\tau_1 = \frac{2 n \pi}{1 \pm R}$ ou $\frac{2 \pi}{R \tau_1} = \frac{1 \pm R}{n R}$

(n entier $\gtrless 0$)

et : $\phi = k \pi$

Nous avons déjà étudié le cas $\phi = k \pi$:

Si $\cos \tau_1 = \cos R \tau_1$, la vitesse normale devient nulle, nous avons donc un choc rasant.

La trajectoire dans l'espace mobile, tournant à la vitesse d'entrainement, est un cercle de centre C_1, ayant pour affixe $\frac{d(-1)^k}{1-R^2}$ et de rayon $\left| r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2} \right|$.

Pour que la masse reste à l'intérieur du cylindre, il faut donc :

a) si k pair : $\phi = 2 p \pi$ $\quad R < \sqrt{1 - \frac{d}{r}}$

b) si k impair : $\phi = (2 p + 1)\pi$ $\quad R > \sqrt{1 + \frac{d}{r}}$

6 - COMPARAISON DES CHOCS PARFAITS ET IMPARFAITS -

Pour les chocs parfaits, nous avons obtenu des zones où nous pouvons

avoir un régime de chocs périodiques, la période pouvant être quelconque à l'intérieur de ces zones.

Pour les chocs imparfaits, du fait du coefficient de restitution de vitesse normale à la paroi, inférieur à 1, et du frottement sec, les solutions de chocs périodiques dégénèrent en une ou quelques solutions discrètes, et, dans ce cas, la période des chocs peut être unique, ou, peut prendre quelques valeurs discrètes.

Les solutions, obtenues pour les chocs imparfaits, se trouvent à l'intérieur des zones obtenues pour les chocs parfaits, comme le montre le graphique.

CONCLUSION

- Les systèmes étudiés, bien qu'étant très schématiques, nous ont permis de mettre en évidence des phénomènes qui n'étaient pas prévus a priori, et qui constituent des instabilités par rapport au mouvement de rotation uniforme de même vitesse que celle d'entrainement.

Qualitativement,du moins, ces phénomènes doivent se retrouver pour une tige déformable en rotation dans un cylindre.

- L'étude des chocs périodiques nous a donné un résultat intéressant. Pour le système étudié, nous pouvons avoir deux états d'équilibre relatif : "frottement" ou"chocs", ces états ayant mêmes caractéristiques.

Nous pouvons penser que pour d'autres systèmes mécaniques, avec frottement sec, il est possible de trouver les deux états d'équilibre "frottement" ou "chocs périodiques".

Annexe 1

RESOLUTION DE L'EQUILIBRE RELATIF - FOUETTEMENT -

Nous avons les solutions :

$$u_1 = r\, e^{j(R\tau-\phi_1+\alpha)}$$

$$u_2 = (\rho_{21}+\rho)\, e^{j(R\tau-\phi_2+\alpha+\beta)}$$

où α, β, ρ et leurs dérivées premières et secondes par rapport à τ sont supposés petits.

En portant dans les équations du mouvement (2') (3') et en séparant parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$-(R+\dot{\alpha})^2 + 3 + \mu_1 - \frac{\rho_{21}+\rho}{r}\cos(\phi_2-\phi_1-\beta) = \frac{2\,d}{r}\cos(\phi_1-\alpha) \qquad (8)$$

$$\ddot{\alpha} + 2\,\varepsilon\,(R+\dot{\alpha}) + \mu_1\, f + \frac{\rho_{21}+\rho}{r}\sin(\phi_2-\phi_1-\beta) = \frac{2\,d}{r}\sin(\phi_1-\alpha) \qquad (9)$$

$$\ddot{\rho} + 2\,\varepsilon\,\dot{\rho} + (1-R^2)\rho - 2\,R\,\rho_{21}(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) - r\cos(\phi_2-\phi_1-\beta) + (1-R^2)\rho_{21} = 0 \qquad (10)$$

$$\rho_{21}(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta}) + 2\,\varepsilon\,\rho_{21}(\dot{\alpha}+\dot{\beta}) + 2\,R\,\dot{\rho} + 2\,\varepsilon\,R\,\rho + 2\,\varepsilon\,R\,\rho_{21} - r\sin(\phi_2-\phi_1-\beta) = 0 \qquad (11)$$

Nous éliminons μ_1 entre les équations (8) et (9), puis nous linéarisons les équations, en tenant compte du fait que ρ_{21}, ϕ_1 et ϕ_2 sont supposés solutions du régime permanent.

Nous obtenons un système d'équations qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + KX = 0$$

avec : $X = \begin{bmatrix}\rho\\ \alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ $\quad \dot{X} = \begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}$ $\quad \ddot{X} = \begin{bmatrix}\ddot{\rho}\\ \ddot{\alpha}\\ \ddot{\beta}\end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}2\,\varepsilon & -2\,R\,\rho_{21} & -2\,R\,\rho_{21}\\ 0 & 2(\varepsilon + f\,R) & 0\\ \dfrac{2\,R}{\rho_{21}} & 2\,\varepsilon & 2\,\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1-R^2 & 0 & -r\sin(\phi_2-\phi_1) \\ \dfrac{\sin(\phi_2-\phi_1+\psi)}{r\cos\psi} & \dfrac{2\,d\cos(\phi_1-\psi)}{r\cos\psi} & -\dfrac{\rho_{21}}{r\cos\psi}\cos(\phi_2-\phi_1+\psi) \\ \dfrac{2\,\varepsilon\,R}{\rho_{21}} & 0 & \dfrac{r}{\rho_{21}}\cos(\phi_2-\phi_1) \end{bmatrix}$$

Cherchons des solutions de la forme :

$$X = A\,e^{s\tau}$$

d'où : $(s^2M + sB + K)X = 0$

Pour qu'il existe des solutions, il faut que :

$$\det(s^2M + sB + K) = 0$$

Nous obtenons l'équation caractéristique suivante :

$$a_6\,s^6 + a_5\,s^5 + a_4\,s^4 + a_3\,s^3 + a_2\,s^2 + a_1\,s + a_o = 0 \qquad (12)$$

Avec :

$$a_6 = 1$$

$$a_5 = 2(3\,\varepsilon + f\,R)$$

$$a_4 = 2(1+R^2) + 4\,\varepsilon(3\,\varepsilon + 2\,f\,R) + \frac{2\,d}{r\cos\psi}\cos(\phi_1-\psi) + \frac{1-R^2-2\,\varepsilon\,f\,R}{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\,R^2}$$

$$a_3 = 4(1+R^2)\,(2\,\varepsilon + f\,R) + 4\,\varepsilon\left[\frac{2\,d}{r\cos\psi}\cos(\phi_1-\psi) + \frac{1-R^2-2\,\varepsilon\,f\,R}{(1-R^2)^2+4\,\varepsilon^2R^2}\right] + 8\,\varepsilon^2(\varepsilon+fR)$$

$$a_2 = \frac{4\,d}{r\cos\psi}\cos(\phi_1-\psi)\,(1+R^2+2\varepsilon^2) + \frac{(1-R^2-2\varepsilon fR)\,(1+3R^2+4\varepsilon^2) - 2\,\varepsilon\,R\,\left[2\varepsilon R+f(1-R^2)\right]}{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\,R^2}$$

$$+ (1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\,R^2 + 8\,\varepsilon\,(\varepsilon+fR)\,(1+R^2)$$

$$a_1 = 2\,\varepsilon(1+R^2)\left[\frac{1-R^2-2\,\varepsilon f\,R}{(1-R^2)^2+4\,\varepsilon^2R^2} + \frac{4\,d}{r\cos\psi}\cos(\phi_1-\psi)\right] + 2(\varepsilon+fR)\left[(1-R^2)^2+4\,\varepsilon^2R^2\right]$$

$$+ 2\,R\,\frac{(1-R^2-2\,\varepsilon^2)\left[2\,\varepsilon\,R + f(1-R^2)\right]}{(1-R^2)^2 + 4\,\varepsilon^2\,R^2}$$

$$a_o = \frac{2\,d}{r\cos\psi}\cos(\phi_1-\psi)\left[(1-R^2)^2+4\,\varepsilon^2\,R^2\right]$$

Le régime permanent considéré sera stable si ρ, α, β restent petits ou tendent vers zéro en fonction du temps. Il faut donc que les parties réelles des s_i (solution de l'équation caractéristique (12)) soient négatives.

D'après le critère de Routh, cette condition sera vérifiée si tous les déterminants $[R_n]$ sont positifs.

Avec :

$$R_1 = a_1$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_o \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$R_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_o \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$R_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_o & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 \end{vmatrix}$$

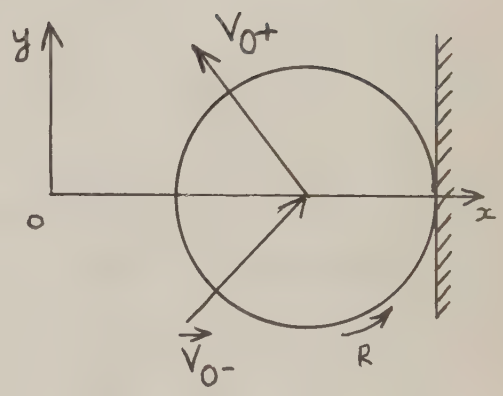
$$R_6 = a_6 \; R_6$$

Annexe 2

CHOCS

2-1 Détermination du coefficient de restitution de vitesse R_T

Considérons une masse sphérique de rayon r_2 se déplaçant dans un plan horizontal. La masse tourne à vitesse constante R autour de son axe. Cette masse vient en contact avec une paroi au point A situé sur l'axe ox, et la paroi est perpendiculaire à ox. Le contact entre la masse et la paroi se fait avec frottement (coefficient de frottement $f = \text{tg}\ \psi$).



Soit $\vec{V}_{O-} = V_{NO-}\ \vec{x} + V_{TO-}\ \vec{y}$

la vitesse du centre de masse juste avant le choc, et :

$$\vec{V}_{O+} = V_{NO+}\ \vec{x} + V_{TO+}\ \vec{y}$$

la vitesse du centre de masse juste après le choc.

Soit $\vec{P}$ le vecteur percussion, nous avons donc :

$$m\ (\vec{V}_{O+} - \vec{V}_{O-}) = \vec{P}$$

Le choc se faisant avec frottement, si la vitesse de glissement garde au cours du choc la même direction et le même sens, alors :

$$\vec{P} = \vec{P}_N + \vec{P}_T$$

Avec : $\vec{P}_N = -\ P_N\ \vec{x}$, $P_N > 0$ dans le cas de figure considéré

et $|\vec{P}_T| = f\ P_N$

ou $\vec{P}_T = \varepsilon\ f\ P_N\ \vec{y}$ $\qquad \varepsilon = \pm\ 1$

La vitesse de glissement est :

$$\vec{U} = (V_{TO-} + r_2\ R)\ \vec{y}$$

La percussion tangentielle doit vérifier les conditions suivantes :

$$\vec{P}_T \wedge \vec{U} = 0 \qquad \text{toujours vérifié}$$

$$\vec{P}_T \cdot \vec{U} < 0$$

$$\vec{P}_T \cdot \vec{U} = \varepsilon\, f\, P_N (V_{TO^-} + r_2\, R)$$

Donc :

$$\text{si} \quad V_{TO^-} + r_2\, R > 0 \qquad \varepsilon = -1$$

$$\text{si} \quad V_{TO^-} + r_2\, R < 0 \qquad \varepsilon = +1$$

Nous projetons l'égalité $m(\vec{V}_{O^+} - \vec{V}_{O^-}) = \vec{P}$ sur les axes :

$$m\,(V_{NO^+} - V_{NO^-}) = -\,P_N$$

$$m\,(V_{TO^+} - V_{TO^-}) = \varepsilon\, f\, P_N$$

Soit : $V_{TO^+} - V_{TO^-} = -\,\varepsilon\, f\,(V_{NO^+} - V_{NO^-})$

En utilisant les relations entre les vitesses et les coefficients de restitution de vitesse :

$$V_{NO^+} = -\,R_N\, V_{NO^-}$$

$$V_{TO^+} = R_T\, V_{TO^-}$$

Nous obtenons :

$$R_T = 1 + \varepsilon\, f\,(R_N + 1)\,\frac{V_{NO^-}}{V_{TO^-}}$$

ou $\quad V_{TO^+} = V_{TO^-} + \varepsilon\, f\,(R_N + 1)\, V_{NO^-}$

2-2 <u>Résolution du système d'équations</u>

Nous avons :

$$u = \frac{d}{1-R^2}\, e^{j(R\tau+\phi)} + a_1\, e^{j(\tau+\psi_1)} + a_2\, e^{-j(\tau+\psi_2)}$$

donc : $\quad \dot{u} = \dfrac{jdR}{1-R^2}\, e^{j(R\tau+\phi)} + j\, a_1\, e^{j(\tau+\psi_1)} - j\, a_2\, e^{-j(\tau+\psi_2)}$

Nous avons posé : $a_1\, e^{j\psi_1} + a_2\, e^{-j\psi_2} = \rho\, e^{-j\theta}$

soit :

$$a_1 \sin(\psi_1+\psi_2) = \rho \sin(\psi_2-\theta)$$

$$a_2 \sin(\psi_1+\psi_2) = \rho \sin(\psi_1+\theta)$$

L'équation $u_o = r$ donne :

$$\frac{d}{1-R^2}\, e^{j\phi} + \rho\, e^{-j\theta} = r$$

$$\rho \cos \theta = r - \frac{d}{1-R^2} \cos \phi$$

soit :

$$\rho \sin \theta = \frac{d}{1-R^2} \sin \phi$$

En appelant $\Delta\psi_1$ et $(-\Delta\psi_2)$ les discontinuités sur les déphasages ψ_1 et ψ_2 à l'instant du choc, nous pouvons définir les positions et les vitesses de la masse aux instants $\tau = 0^-$, $\tau = 0^+$, $\tau = \tau_{1-}$, $\tau = \tau_{1+}$

$$u_{o-} = \frac{d}{1-R^2} e^{j\phi} + a_1 e^{j(\psi_1-\Delta\psi_1)} + a_2 e^{-j(\psi_2-\Delta\psi_2)}$$

$$u_{o+} = \frac{d}{1-R^2} e^{j\phi} + a_1 e^{j\psi_1} + a_2 e^{-j\psi_2}$$

$$u_{\tau_{1-}} = \frac{d}{1-R^2} e^{j(R\tau_1+\phi)} + a_1 e^{j(\tau_1+\psi_1)} + a_2 e^{-j(\tau_1+\psi_2)}$$

$$u_{\tau_{1+}} = \frac{d}{1-R^2} e^{j(R\tau_1+\phi)} + a_1 e^{j(\tau_1+\psi_1+\Delta\psi_1)} + a_2 e^{-j(\tau_1+\psi_2+\Delta\psi_2)}$$

$$\dot{u}_{o-} = \frac{jdR}{1-R^2} e^{j\phi} + j\, a_1 e^{j(\psi_1-\Delta\psi_1)} - j\, a_2 e^{-j(\psi_2-\Delta\psi_2)}$$

$$\dot{u}_{o+} = \frac{jdR}{1-R^2} e^{j\phi} + j\, a_1 e^{j\psi_1} - j\, a_2 e^{-j\psi_2}$$

$$\dot{u}_{\tau_{1-}} = \frac{jdR}{1-R^2} e^{j(R\tau_1+\phi)} + j\, a_1 e^{j(\tau_1+\psi_1)} - j\, a_2 e^{-j(\tau_1+\psi_2)}$$

$$\dot{u}_{\tau_{1+}} = \frac{jdR}{1-R^2} e^{j(R\tau_1+\phi)} + j\, a_1 e^{j(\tau_1+\psi_1+\Delta\psi_1)} - j\, a_2 e^{-j(\tau_1+\psi_2+\Delta\psi_2)}$$

Les conditions de périodicité nous permettent d'écrire :

$$u_{\tau_{1+}} = u_{o+} e^{jR\tau_1}$$

$$\dot{u}_{\tau_{1+}} = \dot{u}_{o+} e^{jR\tau_1}$$

En explicitant ces équations, nous obtenons directement :

$$\Delta \psi_1 = (R-1)\tau_1 + 2\, p\, \pi$$

$$\Delta \psi_2 = -(R+1)\tau_1 + 2\, q\, \pi$$

Etudions géométriquement l'équation $u_{o-} = u_{o+}$.

Pour cela, nous allons représenter graphiquement u_{o-} et u_{o+}.

Soit O l'origine situé sur l'axe du cylindre, P le point de choc situé sur l'axe ox d'après les hypothèses faites.

soit : $\vec{OC} \equiv \frac{d}{1-R^2}\, e^{j\phi}$

$$\vec{CB}_{0-} \equiv a_1\, e^{j(\psi_1-\Delta\psi_1)}$$

$$\vec{B_{0-}P} \equiv a_2\, e^{-j(\psi_2-\Delta\psi_2)}$$

$$\vec{CB}_{0+} \equiv a_1\, e^{j\psi_1}$$

$$\vec{B_{0+}P} \equiv a_2\, e^{-j(\psi_2)}$$

Donc : $u_{o-} \equiv \vec{OC} + \vec{CB}_{0-} + \vec{B_{0-}P}$

$u_{o+} \equiv \vec{OC} + \vec{CB}_{0+} + \vec{B_{0+}P}$

Comme nous avons posé $a_1\, e^{j\psi_1} + a_2\, e^{-j\psi_2} = \rho\, e^{-j\theta}$

$$\vec{CP} \equiv \rho\, e^{-j\theta}$$

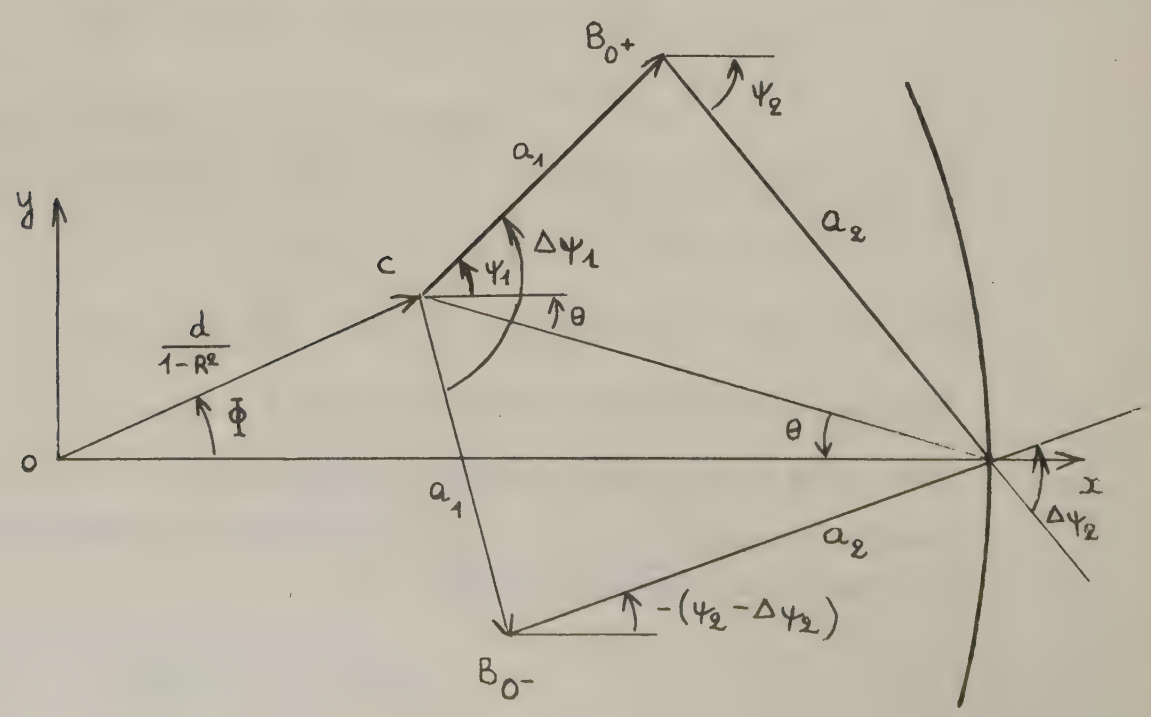
et $CP = \rho \quad (\vec{OX}, \vec{CP}) = -\theta$

Les triangles $CB_{0-}P$ et $CB_{0+}P$ ayant leurs trois côtés égaux sont symétriques par rapport à CP, donc :

$$\theta + \psi_1 = \frac{\Delta\psi_1}{2}\ (2\pi)$$

$$\theta + \frac{\Delta\psi_2}{2} = \psi_2\ (2\pi)$$

En remplaçant $\Delta\psi_1$ et $\Delta\psi_2$ par leurs valeurs, nous obtenons :



$$\psi_1 = \frac{R-1}{2}\tau_1 - \theta + p\,r$$

$$\psi_2 = -\frac{R+1}{2}\tau_1 + \theta + q\,\pi$$

et $\psi_1 + \psi_2 = -\tau_1 + (p+q)\pi$

Nous avons donc maintenant :

$$a_1 = (-1)^p\,\rho\,\frac{\sin\frac{R+1}{2}\tau_1}{\sin\tau_1}$$

$$a_2 = -(-1)^q\,\rho\,\frac{\sin\frac{R-1}{2}\tau_1}{\sin\tau_1} \qquad \text{si } \sin\tau_1 \neq 0$$

Nous avons vu que :

$$V_{NO^+} = -R_N\,V_{NO^-}$$

$$V_{TO^+} = R_T\,V_{TO^-}$$

Avec :

$$V_{NO^-} = -\left\{\frac{dR}{1-R^2}\sin\phi + a_1\sin\left[(1-R)\tau_1 + \psi_1\right] + a_2\sin\left[(R+1)\tau_1 + \psi_2\right]\right\}$$

$$V_{TO^-} = \frac{dR}{1-R^2}\cos\phi + a_1\cos\left[(1-R)\tau_1 + \psi_1\right] - a_2\cos\left[(R+1)\tau_1 + \psi_2\right]$$

$$V_{NO^+} = -\left\{\frac{dR}{1-R^2}\sin\phi + a_1\sin\psi_1 + a_2\sin\psi_2\right\}$$

$$V_{TO^+} = \frac{dR}{1-R^2}\cos\phi + a_1\cos\psi_1 - a_2\cos\psi_2$$

En remplaçant a_1, a_2, ψ_1, ψ_2, $\frac{d}{1-R^2}\cos\phi$ et $\frac{d}{1-R^2}\sin\phi$ par leurs expressions en fonction de ρ, θ, τ_1, puis en portant dans les deux équations précédentes, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$(1+R_N)\,A\,\rho\sin\theta + (1-R_N)\,B\,\rho\cos\theta = 0$$

$$-\left[2\,B + \varepsilon\,f\,(R_N+1)\,A\right]\rho\sin\theta + \varepsilon\,f\,(R_N+1)\,B\,\rho\cos\theta = 0$$

Avec : $A = R\sin\tau_1 - \sin R\,\tau_1$ $\qquad$ $B = \cos\tau_1 - \cos R\,\tau_1$

2-3 <u>Choc parfait</u>

Nous avons $\phi = k\,\pi$

donc $u = \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\,e^{jR\tau} + a_1\,e^{j(\tau+\psi_1)} + a_2\,e^{-j(\tau+\psi_2)}$

Nous pouvons exprimer les constantes $a_1\ e^{j\psi_1}$ et $a_2\ e^{-j\psi_2}$ en fonction des conditions initiales $u_o = r$ et $\dot{u}_{o+}$,

$$\text{d'où :}\quad u = \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\left[e^{jR\tau} - \cos\tau - j\,R\sin\tau\right] + r\cos\tau + \dot{u}_{o+}\sin\tau$$

D'après la condition de périodicité :

$$u_{\tau_1-} = u_{o+}\ e^{jR\tau_1} = r\ e^{jR\tau_1}$$

nous pouvons écrire :

$$\frac{d(-1)^k}{1-R^2}\left[e^{jR\tau_1} - \cos\tau_1 - j\,R\sin\tau_1\right] + r\cos\tau_1 + \dot{u}_{o+}\sin\tau_1 = r\ e^{jR\tau_1}$$

et tirer la valeur de $\dot{u}_{o+}$ dont la partie réelle est V_{NO+}, la partie imaginaire V_{TO+}.

$$V_{NO+} = \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right]\frac{\cos R\,\tau_1 - \cos\tau_1}{\sin\tau_1}$$

$$V_{TO+} = r\,\frac{\sin R\,\tau_1}{\sin\tau_1} - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\,\frac{\sin R\,\tau_1 - R\sin\tau_1}{\sin\tau_1}$$

En remplaçant $\dot{u}_{o+}$ par sa valeur, nous obtenons la trajectoire de la masse :

$$u = \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\ e^{jR\tau} + \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right]\frac{\sin(\tau_1-\tau) + e^{jR\tau_1}\sin\tau}{\sin\tau_1}$$

2-3-1 <u>Etude sur calculateur analogique</u>

Cette étude a été faite dans le plan mobile tournant à la vitesse d'entrainement, en posant :

$$u = Z\ e^{jR\tau}$$

L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{Z} + 2\,j\,R\,\dot{Z} + (1-R^2)\,Z = d(-1)^k$$

Posons $Z = v + j\,w$

$$\ddot{v} - 2\,R\,\dot{w} + (1-R^2)\,v = d(-1)^k$$
$$\ddot{w} + 2\,R\,\dot{v} + (1-R^2)\,w = 0$$

Pour le cablage du système,il faut connaitre les conditions initiales v_o, $\dot{v}_o$, w_o, $\dot{w}_o$.

Nous avons pris pour conditions initiales celles déterminées dans l'étude analytique, à savoir :

$$v_o = r$$

$$\dot{v}_o = \left(r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right) \frac{\cos R\,\tau_1 - \cos \tau_1}{\sin \tau_1}$$

$$w_o = 0$$

$$\dot{w}_o = \left(r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right) \frac{\sin R\,\tau_1 - R \sin \tau_1}{\sin \tau_1}$$

Pour que les chocs soient périodiques, de période réduite τ_1, il faut que :

$$v(\tau_1) = v(0)$$
$$w(\tau_1) = w(0)$$
$$v^2 + w^2 < r^2 \text{ pour } 0 < \tau < \tau_1$$

Principe de manipulation

Nous nous fixons R et τ_1, les conditions initiales sont donc déterminées et nous faisons évoluer le système jusqu'à l'instant τ_1. Nous obtenons la trajectoire de la masse. Si les conditions précédentes sont vérifiées, nous obtenons un régime de chocs périodiques pour les valeurs fixées de R et τ_1, sinon nous recommençons avec d'autres valeurs.

2-3-2 Etude de la trajectoire dans le cas de choc parfait

1) Equation

Nous allons étudier cette trajectoire dans le plan mobile tournant à la vitesse d'entrainement, en posant :

$$u = Z\, e^{jR\tau}$$

d'où :

$$Z = \frac{d(-1)^k}{1-R^2} + \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right] \frac{\sin(\tau_1-\tau)\, e^{-jR\tau} + e^{jR(\tau-\tau_1)} \sin \tau}{\sin \tau_1}$$

En effectuant le changement de variable :

$$\tau = \frac{\tau_1}{2} + \delta \quad \text{pour } 0 < \tau < \tau_1 \qquad -\frac{\tau_1}{2} < \delta < \frac{\tau_1}{2}$$

$$Z = \frac{d(-1)^k}{1-R^2} + \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right] \left\{ \frac{\cos R\,\frac{\tau_1}{2}}{\cos \frac{\tau_1}{2}} \cos \delta + j\, \frac{\sin R\,\frac{\tau_1}{2}}{\sin \frac{\tau_1}{2}} \sin \delta \right\} e^{-jR\delta}$$

Nous voyons que Z est symétrique par rapport à $\delta = 0$.

Si nous posons :

$$A(\delta)^2 = \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right]^2 \left\{ \frac{\sin^2 R\frac{\tau_1}{2}}{\sin^2\frac{\tau_1}{2}} + \left[\frac{\cos^2 R\frac{\tau_1}{2}}{\cos^2\frac{\tau_1}{2}} - \frac{\sin^2 R\frac{\tau_1}{2}}{\sin^2\frac{\tau_1}{2}}\right]\cos^2\delta \right\}$$

et : $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} R\frac{\tau_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}}\operatorname{tg}\delta$$

$$Z = \frac{d(-1)^k}{1-R^2} + A(\delta)\, e^{j(\alpha - R\delta)}$$

<u>Interprétation géométrique</u>

Considérons l'équation de la trajectoire dans le plan mobile sous la forme :

$$Z = \frac{d(-1)^k}{1-R^2} + \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right]\frac{\sin\frac{R+1}{2}\tau_1}{\sin\tau_1}\, e^{j(1-R)\delta} + \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right]\frac{\sin\frac{1-R}{2}\tau_1}{\sin\tau_1}\, e^{-j(R+1)\delta}$$

Nous allons tracer un diagramme vectoriel :

$$Z \equiv \vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CS} + \vec{SM}$$

Avec : $$\vec{OC} \equiv \frac{d(-1)^k}{1-R^2}$$

$$\vec{CS} \equiv \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right]\frac{\sin\frac{R+1}{2}\tau_1}{\sin\tau_1}\, e^{j(1-R)\delta}$$

$$\vec{SM} \equiv \left[r - \frac{d(-1)^k}{1-R^2}\right]\frac{\sin\frac{1-R}{2}\tau_1}{\sin\tau_1}\, e^{-j(R+1)\delta}$$

Le vecteur $\vec{OC}$ est un vecteur constant $\forall\ \delta$.

Le vecteur $\vec{CS}$ est un vecteur tournant à vitesse constante $\omega_1 = 1-R$ et de longueur constante $\forall\ \delta$: $|CS|$.

Le vecteur $\vec{SM}$ est un vecteur tournant à vitesse constante $\omega_2 = -(R+1)$ et de longueur constante $\forall\ \delta$: $|SM|$.

Considérons : le cercle de centre C et de rayon $|CS|\ (1 + \frac{1-R}{1+R})$ fixe dans le plan mobile, le cercle de centre S lié au vecteur $\vec{SM}$ et de rayon

$|CS| \left(\frac{1-R}{R+1}\right)$.

Ces deux cercles sont tangents en I. Soit I_2 le point lié au cercle de centre S.

$$V(I_2) = |CS| \ (1-R) - |CS| \ \frac{1-R}{1+R} \ (1+R)$$

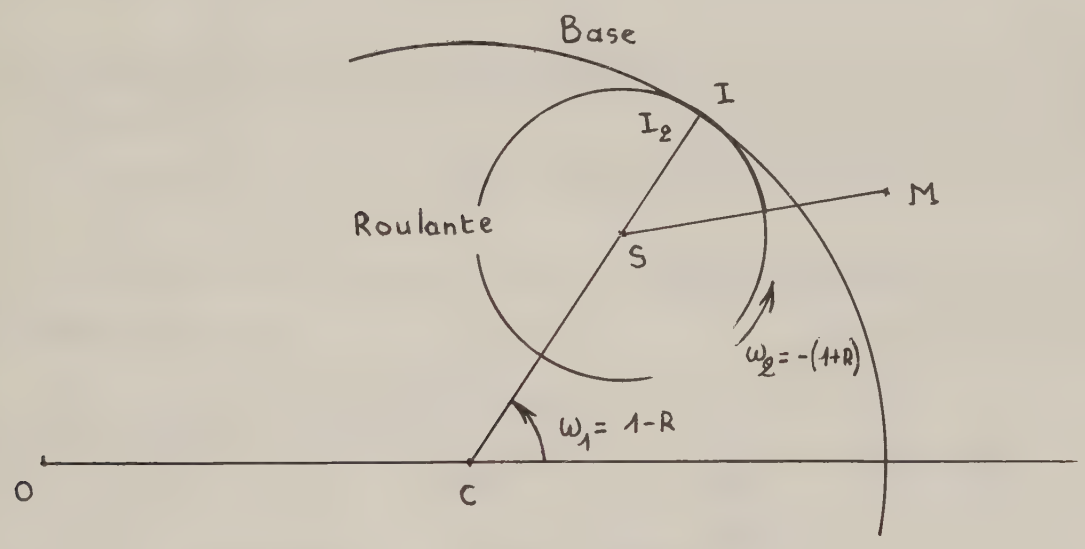
$$V(I_2) = 0$$

Le cercle de centre S (roulant) roule donc sans glisser sur le cercle de centre C fixe (base).

<u>Le lieu de M, donc les trajectoires, appartiennent à la famille des cycloïdes ou hypocycloïdes</u>.

La distance CM passe par des extrémums pour $\delta = n \frac{\pi}{2}$.

En utilisant cette propriété, nous pouvons trouver suivant les valeurs de R et τ_1, les trajectoires qui sortent surement du cylindre.



<u>Les trajectoires sortent surement du cylindre</u> :

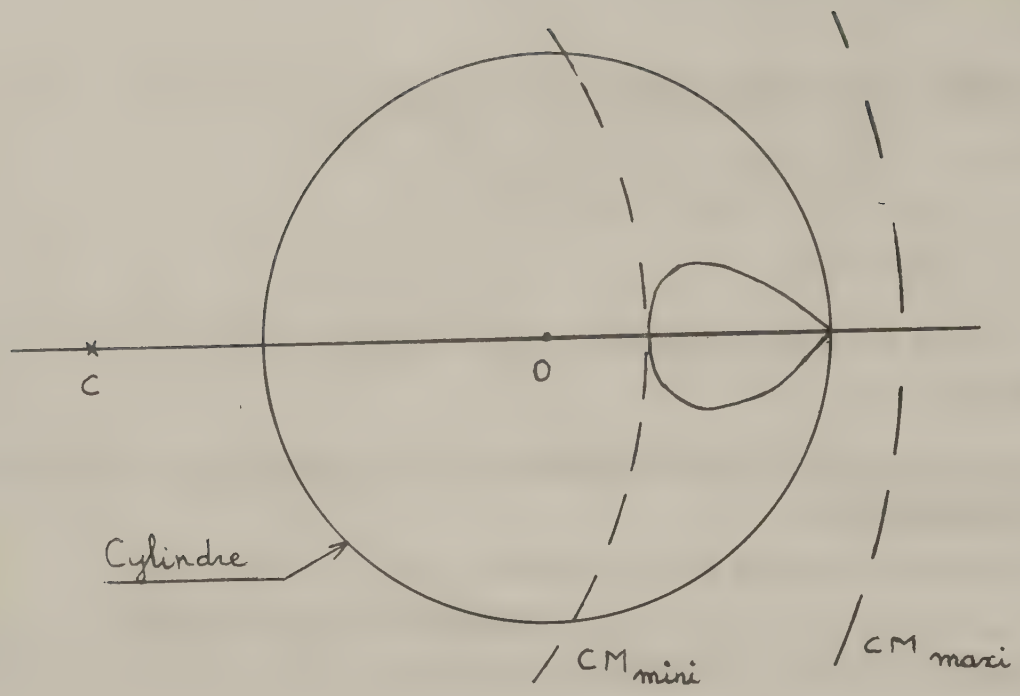
1) si $\phi = 2 k \pi$

pour $R > \sqrt{1 - \frac{d}{r}}$ si $\tau_1 > \pi$

2) si $\phi = (2 k + 1)\pi$

pour $R < \sqrt{1 + \frac{d}{r}}$ si $\tau_1 > \pi$

<u>Exemple</u> : $\phi = 2 k \pi$ $\qquad 1 < R < \sqrt{1 + \frac{d}{r}}$



Le cercle de centre C et de rayon CM maximum doit être extérieur au cylindre pour que le choc ait lieu en P. Il faut donc que $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ou $\tau_1 < \pi$ pour que la trajectoire ne sorte pas du cylindre.

2-4 Choc imparfait $R_N < 1$, $f \neq 0$

2-4-1 Résolution

Nous avons $\theta = \varepsilon\ \psi + n\ \pi$ $\qquad \varepsilon = \pm 1$

Nous avons posé $\frac{d}{1-R^2} \sin\ \phi = \rho\ \sin\ \theta$

$$r - \frac{d}{1-R^2} \cos\ \phi = \rho\ \cos\ \theta$$

d'où : $\quad \sin(\phi+\theta) = \frac{1-R^2}{d/r} \sin\ \theta$

soit : $\quad \sin(\phi+\varepsilon\psi) = \frac{1-R^2}{d/r} \sin\ \varepsilon\ \psi$

La valeur de ρ est telle que :

$$\rho = \frac{d}{1-R^2}\ \frac{\sin\ \phi}{\sin\ \theta} = \frac{r - \frac{d}{1-R^2} \cos\ \phi}{\cos\ \theta}$$

ou : $\quad \rho = (-1)^n\ \frac{d}{1-R^2}\ \frac{\sin\ \phi}{\sin\ \varepsilon\ \psi} = (-1)^n\ \frac{r - \frac{d}{1-R^2} \cos\ \phi}{\cos\ \psi}$

$$\psi_1 = \frac{R-1}{2}\tau_1 - \varepsilon\,\psi + (n+p)\pi$$

$$\psi_2 = -\frac{R+1}{2}\tau_1 + \varepsilon\,\psi + (n+q)\pi$$

$$a_1 = (-1)^{p+n}\frac{d}{1-R^2}\frac{\sin\phi}{\sin\varepsilon\,\psi}\frac{\sin\frac{R+1}{2}\tau_1}{\sin\tau_1}$$

$$a_2 = -(-1)^{q+n}\frac{d}{1-R^2}\frac{\sin\phi}{\sin\varepsilon\,\psi}\frac{\sin\frac{R-1}{2}\tau_1}{\sin\tau_1}$$

R, $\frac{d}{r}$, ε et ψ étant fixés, nous obtenons deux valeurs de ϕ. Comme nous avons supposé ρ, a_1, a_2, positifs, pour une des deux valeurs de ϕ : n, p et q sont déterminés et nous avons une seule valeur pour ρ, a_1, a_2, θ, ψ_1 et ψ_2.

2-4-2 Etude de la trajectoire

Les quantités ρ, a_1, a_2, ψ_1, ψ_2, θ étant connues en fonction de τ_1 et ϕ, la solution de l'équation différentielle du mouvement peut s'écrire :

$$u = \frac{d}{1-R^2}e^{j(R\tau+\phi)} + \left[r - \frac{d}{1-R^2}\cos\phi\right]\frac{e^{j\psi}}{\cos\psi}\,\frac{\sin\tau\,e^{jR\tau_1} + \sin(\tau_1-\tau)}{\sin\tau_1}$$

ou, si nous étudions le mouvement dans le plan mobile tournant à la vitesse d'entrainement, en posant :

$$u = Z\,e^{jR\tau}$$

et en effectuant le changement de variable :

$$\tau = \frac{\tau_1}{2} + \delta \qquad \text{pour} \qquad 0 < \tau < \tau_1 \qquad -\frac{\tau_1}{2} < \delta < \frac{\tau_1}{2}$$

Nous obtenons une expression semblable à celle obtenue pour les chocs parfaits (cf Annexe 2-3-2).

$$Z = \frac{d}{1-R^2}e^{j\phi} + \left[r - \frac{d}{1-R^2}\cos\phi\right]\left[\frac{\cos R\frac{\tau_1}{2}}{\cos\frac{\tau_1}{2}}\cos\delta + j\,\frac{\sin R\frac{\tau_1}{2}}{\sin\frac{\tau_1}{2}}\sin\delta\right]\frac{e^{-jR\delta}e^{j\psi}}{\cos\psi}$$

En posant :

$$A_1(\delta)^2 = \frac{\left[r - \frac{d}{1-R^2}\cos\phi\right]^2}{\cos^2\psi}\left\{\frac{\sin^2 R\frac{\tau_1}{2}}{\sin^2\frac{\tau_1}{2}} + \left[\frac{\cos^2 R\frac{\tau_1}{2}}{\cos^2\frac{\tau_1}{2}} - \frac{\sin^2 R\frac{\tau_1}{2}}{\sin^2\frac{\tau_1}{2}}\right]\cos^2\delta\right\}$$

$$\text{et} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} R \frac{\tau_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\tau_1}{2}} \operatorname{tg} \delta$$

$$Z = \frac{d}{1-R^2} e^{j\phi} + A_1(\delta)\, e^{j(\psi+\alpha-R\delta)}$$

Les trajectoires appartiennent à la famille des cycloïdes ou hypocycloïdes.

Elles peuvent se déduire des trajectoires obtenues pour les chocs parfaits par rotation et similitude.

5 - VALEURS PARTICULIERES DE LA VITESSE DE ROTATION ET DE τ_1 -

5-1 $R = \sqrt{1 \pm \frac{d}{r}}$

Cette valeur est particulière car nous pouvons avoir :

$$\rho = a_1\, e^{j\psi_1} + a_2\, e^{-j\psi_2} = 0$$

or, nous avons supposé $\rho \neq 0$.

Si $\rho = 0$ $\qquad \phi = k\,\pi \quad$ et $\quad a_1\, e^{j\psi_1} = -\, a_2\, e^{-j\psi_2}$

Donc : $\qquad u = \frac{d(-1)^k}{1-R^2} + a_1\, e^{j\psi_1}\left[e^{j\tau} - e^{-j\tau}\right]$

Soit : $\qquad u = \frac{d(-1)^k}{1-R^2} + 2\, j\, a_1\, e^{j\psi_1} \sin \tau$

Comme $u_o = r$, nous avons $\frac{d(-1)^k}{1-R^2} = r$

k pair $\quad \phi = 2\,n\,\pi \qquad\qquad R = \sqrt{1 - \frac{d}{r}}$

k impair $\phi = (2\,n + 1)\pi \qquad R = \sqrt{1 + \frac{d}{r}}$

De plus, pour que les chocs soient périodiques, il faut :

$$u_{\tau_1} = u_o\, e^{jR\tau_1} = r\, e^{jR\tau_1}$$

donc : $\qquad a_1\, e^{j\psi_1} \sin \tau_1 = 0$

Si $a_1\, e^{j\psi_1} = 0$, il n'y a pas de choc, la masse tourne à vitesse constante R, en restant en contact avec le cylindre.

Si $\sin \tau_1 = 0$ $\tau_1 = n\pi$ ou $\frac{2\pi}{R\tau_1} = \frac{2}{nR}$, nous obtenons des chocs périodiques.

Si $R \to \sqrt{1 \pm \frac{d}{r}}$, nous pouvons appliquer la méthode générale qui nous donne d'autres valeurs de la période des chocs. $R = \sqrt{1 \pm \frac{d}{r}}$ sont donc des valeurs singulières.

5-2 Sin $\tau_1 = 0$

Dans la méthode générale, il faut que $\sin \tau_1 \neq 0$.

Supposons $\sin \tau_1 = 0$ $\tau_1 = n\pi$:

$$u = \frac{d}{1-R^2} e^{j(R\tau+\phi)} + a_1 e^{j\psi_1} e^{j\tau} + a_2 e^{-j\psi_2} e^{-j\tau}$$

soit :

$$u = \frac{d}{1-R^2} e^{j(R\tau+\phi)} + (a_1 e^{j\psi_1} + a_2 e^{-j\psi_2}) \cos \tau + j(a_1 e^{j\psi_1} - a_2 e^{-j\psi_2}) \sin \tau$$

$$u_o = \frac{d}{1-R^2} e^{j\phi} + a_1 e^{j\psi_1} + a_2 e^{-j\psi_2}$$

Pour que les chocs soient périodiques, il faut que :

$$u_{\tau_1} = u_o e^{jR\tau_1} = u_o e^{jRn\pi}$$

soit :

$$(-1)^n \left[a_1 e^{j\psi_1} + a_2 e^{-j\psi_2}\right] = \left[a_1 e^{j\psi_1} + a_2 e^{-j\psi_2}\right] e^{jRn\pi}$$

Il faut que :

a) $a_1 e^{j\ 1} + a_2 e^{-j\ 1} = 0$, nous sommes donc ramenés au cas précédent $\rho = 0$ $R = \sqrt{1 \pm \frac{d}{r}}$.

ou b) $e^{jRn\pi} = (-1)^n = e^{jn\pi}$

soit : $R = 1 + \frac{2m}{n}$ m entier $\gtrless 0$

La vitesse est :

$$\dot{u} = \frac{jdR}{1-R^2} e^{j(R\tau+\phi)} - (a_1 e^{j\psi_1} + a_2 e^{-j\psi_2}) \sin \tau + j(a_1 e^{j\psi_1} - a_2 e^{-j\psi_2}) \cos \tau$$

$$\dot{u}_{o+} = \frac{jdR}{1-R^2} e^{j\phi} + j(a_1 e^{j\psi_1} - a_2 e^{-j\psi_2})$$

$$\dot{u}_{\tau_1-} = \frac{jdR}{1-R^2} e^{j(R\tau_1+\phi)} + j(-1)^n (a_1 e^{j\psi_1} - a_2 e^{-j\psi_2})$$

Comme $\dot{u}_{\tau_1-} = \dot{u}_{o-}\ e^{jR\tau_1}$

$$\dot{u}_{o-} = \frac{jdR}{1-R^2}\ e^{j\phi} + j(-1)^n\ (a_1\ e^{j\psi_1} - a_2\ e^{-j\psi_2})\ e^{-jR\tau_1}$$

Or : $e^{-jR\tau_1} = e^{-jRn\pi} = (-1)^n$

$$\dot{u}_{o-} = \frac{jdR}{1-R^2}\ e^{j\phi} + j(a_1\ e^{j\psi_1} - a_2\ e^{-j\psi_2})$$

Donc $\dot{u}_{o-} = \dot{u}_{o+}$

Or, si le choc existe, la vitesse normale change de signe. Pour que l'équation précédente soit vérifiée, il faut donc que la vitesse normale au cylindre à l'instant du choc soit nulle. C'est donc un choc rasant que nous avons déjà étudié au paragraphe [4-7].

5-3 R = 1

Lorsque R tend vers 1, il faut prendre les limites des quantités obtenues dans le cas général.

Si les chocs sont parfaits, nous obtenons $\sin\theta = 0$, d'où $\phi = k\ \pi$, et la période est indéterminée, il faut que la condition $|u| < r \quad \forall\ 0 < \tau < \tau_1$ soit vérifiée quand $R \to 1$.

Si les chocs sont rasants, $\cos\tau_1 = \cos R\ \tau_1$, soit en prenant la limite $\tau_1 \sin\tau_1 = 0$, c'est-à-dire $\sin\tau_1 = 0 \quad \tau_1 = n\ \pi$.

Si les chocs sont imparfaits, la période est donnée par :

$$(1-R_N)\ (\cos\tau_1 - \cos R\ \tau_1) + \varepsilon\ f(R_N+1)\ (R\sin\tau_1 - \sin R\ \tau_1) = 0$$

en prenant la limite quand $R \to 1$, nous obtenons :

$$\tau_1 \sin\tau_1\ (1-R_N) + \varepsilon\ f\ (R_N+1)\ (\sin\tau_1 - \tau_1\cos\tau_1) = 0$$

En étudiant l'équation du mouvement quand R = 1 :

$$\ddot{u} + u = d\ e^{j(\tau+\phi)}$$

soit :

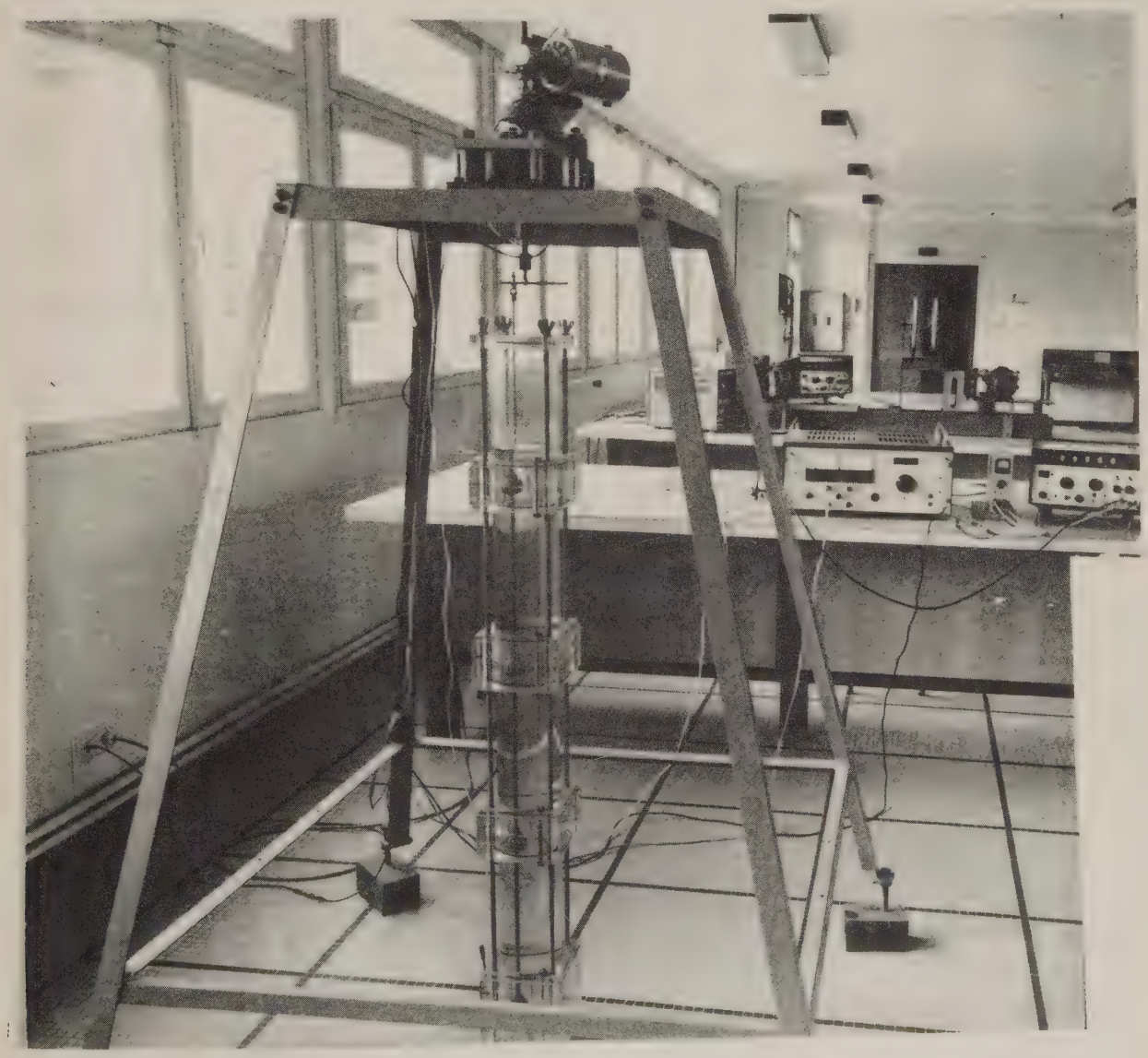
$$u = -\ j\ \frac{d}{2}\ \tau\ e^{j(\tau+\phi)} + a_1\ e^{j\psi_1}\ e^{j\tau} + a_2\ e^{-j\psi_2}\ e^{-j\tau}$$

En appliquant les conditions de périodicité, et les conditions de restitution de vitesses, nous obtenons le même résultat pour l'expression de la période.

Annexe 3

DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Au Laboratoire de Mécanique des Structures de l'E.N.S.M., dirigé par Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Recteur de l'Académie de Besançon, nous avons réalisé le montage expérimental suivant :



Un moteur muni d'un volant d'inertie, permettant d'avoir une vitesse de rotation à peu près constante, entraine un ou plusieurs pendules en rotation autour d'un axe vertical. Les pendules sont liés par suspension à la Cardan.

L'ensemble des pendules est en rotation à l'intérieur d'un cylindre en plexiglass transparent ; son rayon étant tel que,lorsqu'il y a contact, les amplitudes restent petites par rapport aux longueurs des pendules.

BIBLIOGRAPHIE

|1| Y. PIRONNEAU - Les cours de Mécanique générale et de Mécanique des vibrations de l'E.N.S.M. de Nantes

|2| Y. PIRONNEAU, S. DUBIGEON - "Etude de la stabilité d'un arbre vertical de grande longueur, en mouvement dans un milieu visqueux" Annales E.N.S.M., 2ème semestre 1969, p. 84-111

|3| CHIEN HEN WU (University of Minnesota) -"Critical speed of a rotating drill shaft in a uniform casing" Text report ACF - PRF grant 1376 A2 - 21 october 1964

|4| J. VILAINE - "Etude des vibrations forcées de systèmes constitués de masses et ressorts en série, sans amortissement, dont deux des masses entrent en collision lors du mouvement" Thèse de Docteur-Ingénieur 5(1967) Nantes Thèse de Docteur-ès-Sciences 3(1969) Nantes.

Imprimerie E.N.S.M. NANTES